

**Material Teórico - Módulo Sistemas de
Numeração e Paridade**

**Divisibilidade em Diferentes Bases de
Numeração**

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

24 de janeiro de 2022



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Divisibilidade em diferentes bases

Em um dos exemplos da aula anterior, mostramos que $(102012)_3$ é um número par. Fizemos isso de dois modos, primeiro encontrando a representação de $(102012)_3$ na base 10 e verificando que essa representação é de fato um número par, e depois notando que se n é um número natural, então 3^n é um número ímpar, o que implica a existência de números inteiros k_2, k_3, k_4 e k_5 tais que $3^5 = 2k_5 + 1$, $3^4 = 2k_4 + 1$, $3^3 = 2k_3 + 1$ e $3^2 = 2k_2 + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}(102012)_3 &= 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \\ &= 1 \cdot (2k_5 + 1) + 0 \cdot (2k_4 + 1) + 2 \cdot (2k_3 + 1) \\ &\quad + 0 \cdot (2k_2 + 1) + 1 \cdot (2k_1 + 1) + 2 \\ &= 2k_5 + 4k_3 + 2k_1 + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2) \\ &= 2 \cdot (k_5 + 2k_3 + k_1) + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2) \\ &= 2q + (1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2).\end{aligned}$$

Assim, como $2q$ é par, $(102012)_3$ é par se, e somente se, a soma dos algarismos $1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2$ é par. Como $1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 2 = 6$, concluímos que $(102012)_3$ também é par. Notamos também que o argumento utilizado acima pode ser aplicado a qualquer representação na base 3. De fato, $(a_1 a_2 \dots a_n)_3$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\leq a_i \leq 2, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é par se, e somente se, $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ é par. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 1. *Que condição devemos impor sobre os algarismos a, b e c para que o número $(abc)_6$ seja divisível por 5?*

Solução. Repetindo o último argumento acima, temos que existem inteiros k_1 e k_2 tais que $6^2 = 5k_2 + 1$ e $6^1 = 5k_1 + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}(abc)_6 &= a \cdot 6^2 + b \cdot 6^1 + c \\ &= a(5k_2 + 1) + b(5k_1 + 1) + c \\ &= 5k_2 a + 5k_1 b + (a + b + c) \\ &= 5(k_2 a + k_1 b) + (a + b + c).\end{aligned}\tag{1}$$

Uma vez que a diferença entre $(abc)_6$ e $a + b + c$ é $5(k_2a + k_1b)$, que é divisível por 5, temos que (abc) é divisível por 5 se, e somente se, $a + b + c$ é divisível por 5. \square

Nos exemplos anteriores, vimos que para qualquer inteiro positivo p dado, existem números inteiros k e q tais que

$$3^p = 2k + 1 \text{ e } 6^p = 5q + 1.$$

Esse resultado pode ser estendido do seguinte modo: se n e p são inteiros com $p > 0$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n^p = (n - 1)k + 1. \quad (2)$$

Para justificar a fórmula (2), vamos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton, o qual enunciamos abaixo.

Teorema 2 (Binômio de Newton). *Sejam a e b números reais e p um inteiro positivo. Então*

$$(a+b)^p = \binom{p}{0} a^p b^0 + \binom{p}{1} a^{p-1} b^1 + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{p} a^0 b^p.$$

Assim, utilizando o teorema 2 com $a = n - 1$ e $b = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} n^p &= [(n - 1) + 1]^p \\ &= \binom{p}{0} (n - 1)^p + \binom{p}{1} (n - 1)^{p-1} + \binom{p}{2} (n - 1)^{p-2} + \\ &\quad + \dots + \binom{p}{p-1} (n - 1)^1 + \binom{p}{p} (n - 1)^0 \\ &= (n - 1) \left[\binom{p}{0} (n - 1)^{p-1} + \binom{p}{1} (n - 1)^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{p}{2} (n - 1)^{p-3} + \dots + \binom{p}{p-1} \right] + 1 \\ &= (n - 1)k + 1, \end{aligned}$$

em que k é igual a

$$\binom{p}{0} (n-1)^{p-1} + \binom{p}{1} (n-1)^{p-2} + \binom{p}{2} (n-1)^{p-3} + \dots + \binom{p}{p-1}.$$

Relembramos, agora, o critério de divisibilidade por 9.

Proposição 3. *Um número inteiro positivo, escrito na base decimal, é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por 9.*

Demonstração. Seja n um número inteiro positivo. Para simplificar o entendimento, demonstraremos a proposição para o caso em que $n = abcd$, em que a, b, c e d são algarismos na base 10. A ideia para provar o caso geral é a mesma. Desse modo, temos

$$n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d.$$

Mas, de acordo com o desenvolvimento do Binômio de Newton, existem k_3 e k_2 inteiros tais que

$$10^3 = (9 + 1)^3 = 9k_3 + 1$$

e

$$10^2 = (9 + 1)^2 = 9k_2 + 1.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} n &= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\ &= a(9 + 1)^3 + b(9 + 1)^2 + c(9 + 1) + d \\ &= a[9k_3 + 1] + b[9k_2 + 1] + 9c + c + d \\ &= 9ak_3 + a + 9bk_2 + b + 9c + c + d \\ &= 9(ak_3 + bk_2 + c) + (a + b + c + d). \\ &= 9K + (a + b + c + d), \end{aligned}$$

em que $K = ak_3 + bk_2 + c$. Portanto, como $9K$ é divisível por 9, temos que n é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é divisível por 9. \square

Mais geralmente, o argumento que utilizamos acima pode ser estendido a qualquer base n do seguinte modo.

Proposição 4. *Sejam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{(r-1)}, a_r$ algarismos na base n , ou seja, $0 \leq a_i \leq n - 1, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$. Então o número $(a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n$ é divisível por $n - 1$ se, e somente se, $a_r + a_{(r-1)} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ é divisível por $n - 1$.*

Demonstração. Temos que

$$(a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n = a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \dots + a_2 n^2 a_1 n + a_0.$$

Mas para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ podemos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton para escrever

$$\begin{aligned} n^i &= [(n-1) + 1]^i \\ &= (n-1)^i + i \cdot (n-1)^{i-1} + \dots + i(n-1) + 1 \\ &= (n-1) [(n-1)^{i-1} + i(n-1)^{i-2} + \dots + i] + 1 \\ &= k_i(n-1) + 1, \end{aligned}$$

em que $k_i = (n-1)^{i-1} + i(n-1)^{i-2} + \dots + i \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} (a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n &= \\ &= a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \dots + a_2 n^2 a_1 n + a_0 \\ &= a_r [k_r(n-1) + 1] + a_{(r-1)} [k_{(r-1)}(n-1) + 1] + \\ &\quad + \dots + a_2 [k_2(n-1) + 1] + a_1 [k_1(n-1) + 1] + a_0 \\ &= a_r k_r(n-1) + a_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)}(n-1) + a_{(r-1)} + \\ &\quad + \dots + a_2 k_2(n-1) + a_2 + a_1 k_1(n-1) + a_1 + a_0 \\ &= (n-1) [a_r k_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} + \dots + a_2 k_2 + a_1 k_1] + \\ &\quad + (a_r + a_{(r-1)} + \dots + a_2 + a_1 + a_0) \\ &= K(n-1) + (a_r + a_{(r-1)} + \dots + a_2 + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Agora, uma vez que

$$K = a_r k_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} + \dots + a_2 k_2 + a_1 k_1 \in \mathbb{Z},$$

temos que $K(n-1)$ é divisível por $n-1$. Portanto, concluímos que $(a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n$ é divisível por $n-1$ se, e somente se, a soma dos algarismos $a_r + a_{(r-1)} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ é divisível por $n-1$. \square

Agora, vamos recordar o critério de divisibilidade por 11.

Proposição 5. *Um número n , escrito na base decimal, é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos das ordens ímpares de n é divisível por 11.*

Demonstração. Para simplificar o entendimento, provaremos esse critério para o caso em que n é formado por 4 algarismos. A ideia para provar o caso geral é a mesma. Assim, seja $n = abcd$. Escrevemos

$$\begin{aligned}n &= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \\&= 1000a + 100b + 10c + d \\&= (1001 - 1)a + (99 + 1)b + (11 - 1)c + d \\&= 1001a - a + 99b + b + 11c - c + d \\&= 1001a + 99b + 11c + [(b + d) - (a + c)].\end{aligned}$$

Mas veja que $1001a + 99b + 11c = 11(91a + 9b + c)$, logo, n é múltiplo de 11 se, e somente se, $(b + d) - (a + c)$, ou seja, se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens pares e a soma dos algarismos das ordens ímpares de n é divisível por 11. \square

Vejam os mais um exemplo.

Exemplo 6. *Mostre que $(71826)_8$ é divisível por 9.*

Solução. Temos que $(71727)_8 = 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7$
Mas

$$8^4 = (9 - 1)^4 = 9^4 - 4 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 - 4 \cdot 9 + 1 = 9k_1 + 1,$$

$$8^3 = (9 - 1)^3 = 9^3 - 3 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 1 = 9k_2 - 1,$$

$$8^2 = (9 - 1)^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 + 1 = 9k_3 + 1$$

e

$$8^1 = 9 - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(71727)_8 &= 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \\&= 7(9k_1 + 1) + 1(9k_2 - 1) + 7(9k_3 + 1) + 2(9 - 1) + 7 \\&= 9 \cdot 7k_1 + 7 + 9k_2 - 1 + 9 \cdot 7k_3 + 7 + 9 \cdot 2 - 2 + 7 \\&= 9(7k_1 + k_2 + 7k_3 + 2) + [(7 + 7 + 7) - (1 + 2)].\end{aligned}$$

Como a diferença entre $(71727)_8$ e $(7 + 7 + 7) - (1 + 2)$ é $9(7k_1 + k_2 + 7k_3 + 2)$, que é um múltiplo de 9, temos que $(71727)_8$ é divisível por 9 se, e somente se, $(7 + 7 + 7) - (1 + 2)$ é divisível por 9. Mas $(7 + 7 + 7) - (1 + 2) = 21 - 3 = 18$ é divisível por 9, logo, $(71727)_8$ é divisível por 9 \square

A seguinte proposição generaliza o critério de divisibilidade por 11, assim como o exemplo 6

Proposição 7. *O número $(a_r a_{(r-1)} \dots a_1 a_0)_n$, representado na base n , é divisível por $n + 1$ se, e somente se, a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é divisível por $n + 1$.*

Demonstração. Temos

$$(a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n = a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0.$$

De modo análogo ao que fizemos para mostrar a proposição 4, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ podemos utilizar o desenvolvimento do Binômio de Newton para escrever

$$\begin{aligned} n^i &= [(n + 1) + (-1)]^i \\ &= (n + 1)^i - i \cdot (n + 1)^{i-1} + \dots + (-1)^{i-1} i (n + 1) + (-1)^i \\ &= (n + 1) [(n + 1)^{i-1} + i (n + 1)^{i-2} + \dots + (-1)^{i-1} i] + \\ &\quad + (-1)^i \\ &= k_i (n + 1) + (-1)^i, \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n &= \\ &= a_r n^r + a_{(r-1)} n^{r-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \\ &= a_r [k_r (n + 1) + (-1)^r] + a_{(r-1)} [k_{(r-1)} (n + 1) + (-1)^{r-1}] + \\ &\quad + \dots + a_2 [k_2 (n + 1) + 1] + a_1 [k_1 (n + 1) - 1] + a_0 \\ &= a_r k_r (n + 1) + (-1)^r a_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} (n + 1) + \\ &\quad + (-1)^{r-1} a_{(r-1)} + \dots + a_2 k_2 (n + 1) + a_2 + a_1 k_1 (n + 1) - \\ &\quad - a_1 + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) [a_r k_r + a_{(r-1)} k_{(r-1)} + \dots + a_2 k_2 + a_1 k_1] + \\
&\quad + ((-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{(r-1)} + \dots + a_2 - a_1 + a_0) \\
&= K(n+1) + [(-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{(r-1)} + \dots + a_2 - a_1 + a_0].
\end{aligned}$$

Agora, note que $(-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{(r-1)} + \dots + a_2 - a_1 + a_0$ é a diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares. Portanto, concluímos que $(a_r a_{(r-1)} \dots a_2 a_1 a_0)_n$ é divisível por $n+1$ se, e somente se, diferença entre a soma dos algarismos das ordens ímpares e a soma dos algarismos das ordens pares é divisível por $n+1$. \square

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. É fundamental que os alunos entendam as demonstrações dos critérios de divisibilidade por 9 e 11, pois as respectivas generalizações seguem os mesmos procedimentos. Depois de mostrar as formas mais gerais dos critérios de divisibilidade apresentados nesse material, é importante que o professor proponha exemplos extras em diferentes bases como aplicação desses resultados. Isso contribuirá para que os alunos se familiarizem com os critérios em sua forma mais geral.