Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Propriedades - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Novembro de 2023

Nesta aula, estudaremos as funções convexas e côncavas. Deduziremos uma desigualdade muito importante, fonte de muitas outras, devida a Jensen. Também mostraremos como a monotonicidade da primeira derivada comanda a concavidade do gráfico da função. Nesse sentido, destacamos o corolário (8) que apresenta a relação entre o sinal da segunda derivada e a concavidade. Encerraremos com alguns exemplos.

1 Médias ponderadas

Dizemos que os números reais não negativos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ formam um *sistema de pesos* se sua soma vale 1: $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$. Nesse caso, dados n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos formar a *média (aritmética) ponderada*

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n, \tag{1}$$

dos $x_i's$ com pesos $t_i's$.

Se, digamos, x_1 é o menor e x_n é o maior dentre os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então

$$x_1 = \sum_{k=1}^{n} t_k x_1 \leq \sum_{k=1}^{n} t_k x_k \leq \sum_{k=1}^{n} t_k x_n = x_n.$$

Além disso, caso $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam todos iguais a x, a expressão $\sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ também vale x. Esses fatos justificam a razão pela qual chamamos a expressão (1) de média. Em particular, se os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertencem a um intervalo I, toda média ponderada dos $x_i's$ também pertence a I.

Exemplo 1. *A média aritmética nada mais é do que a média ponderada com todos os pesos iguais. De fato, as igualdades* $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$ *e* $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ *equivalem a* $t_k = 1/n$*, para cada* $1 \leq k \leq n$*. Nessas condições,*

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

Qualquer média ponderada de dois números a e b tem a forma

$$(1-t)a+tb,$$

para $0 \leq t \leq 1$. Com efeito, segue da definição que uma média ponderada de a e b se escreve como $sa+tb$, para certos números $s,t \in [0,1]$ com soma 1. Daí, $s = 1-t$ e a afirmação está justificada.

Perceba que os pontos da forma $(1-t)a+tb$, com $t \in [0,1]$, constituem, se $a < b$, o intervalo $[a,b]$. Com efeito, já vimos acima que $(1-t)a+tb \in [a,b]$, para cada $0 \leq t \leq 1$. Reciprocamente, se $x \in [a,b]$, basta pôr $t = (x-a)/(b-a)$ para se ter $x = (1-t)a+tb$. [1]

Exemplo 2 (PROFMAT - ENQ/2016.1). *Seja $f : [a,b] \to [f(a),f(b)]$ uma função bijetiva, onde $[a,b]$ e $[f(a),f(b)]$ são intervalos de números reais. Considere, ainda, $x_1,x_2 \in [a,b]$ e y_1,y_2 números reais positivos. Mostre que existe um único $c \in [a,b]$ tal que*

$$f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 = f(c)(y_1+y_2).$$

Solução. Sendo as razões $y_1/(y_1+y_2)$, $y_2/(y_1+y_2)$ positivas e com soma igual a 1, a expressão

$$d := \frac{y_1}{y_1+y_2}f(x_1) + \frac{y_2}{y_1+y_2}f(x_2)$$

é uma média ponderada das imagens $f(x_1), f(x_2)$. Portanto, d representa um (único) ponto do intervalo imagem $[f(a),f(b)]$, o que, pela injetividade de f, implica a existência de um único $c \in [a,b]$ satisfazendo $f(c) = d$. Agora,

$$\begin{aligned} d = f(c) &\Leftrightarrow d(y_1+y_2) = f(c)(y_1+y_2) \\ &\Leftrightarrow f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 = f(c)(y_1+y_2). \end{aligned}$$

$\square$

[1] Em um sentido cinemático, quando t (o tempo) varia de 0 a 1, o ponto $x = (1-t)a+tb$ percorre, com velocidade constante igual a $b-a$, o segmento de extremos a e b.

2 Funções convexas e côncavas

Se I é um intervalo, diremos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é *convexa* (ou que o gráfico de f tem *concavidade para cima*) se cada arco do gráfico de f situa-se *abaixo* do segmento de reta com mesmos extremos.

Exemplo 3. *A função modular é convexa.*

Para justificar esse e outros exemplos, convém traduzir a definição acima em termos analíticos, tarefa que realizaremos utilizando o material da seção anterior.

O ponto-chave é a seguinte observação: se $A = (a,a')$ e $B = (b,b')$ são pontos distintos de uma reta (oblíqua) r, então os pontos X do segmento AB têm a forma

$$X = ((1-t)a + tb,(1-t)a' + tb'),$$

para $0 \leq t \leq 1$. De fato, uma condição necessária para que $X = (x,x') \in AB$ é a pertinência $x \in [a,b]$, ou seja, $x = (1-t)a + tb$ para um certo $t \in [0,1]$. Nesse caso, se, digamos, $X \neq A$, então $X \in AB$ se, e só se, os segmentos AX e AB têm mesma inclinação, isto é,

$$\begin{aligned} X \in AB \Leftrightarrow \quad & \underbrace{\frac{x'-a'}{t(b-a)}}_{\text{inclinação de } AX} = \underbrace{\frac{b'-a'}{b-a}}_{\text{inclinação de } AB} \\ & \Leftrightarrow x' = (1-t)a' + tb', \end{aligned}$$

como queríamos.

Portanto, se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer e $a,b \in I$, um ponto P no arco do gráfico de f com extremos $A = (a,f(a))$ e $B = (b,f(b))$ tem a forma

$$P = ((1-t)a + tb,f((1-t)a + tb)),$$

enquanto o ponto correspondente X na corda com mesmos extremos se escreve como

$$X = ((1-t)a + tb,(1-t)f(a) + tf(b)),$$

em que $0 \leq t \leq 1$. Daí, f é convexa se, e só se, a ordenada de P nunca supera a ordenada de X ou, equivalentemente,

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b), \tag{2}$$

para quaisquer pontos $a,b \in I$ e para qualquer valor $t \in [0,1]$.

Dispondo de uma definição precisa de função convexa, qual seja, (2), podemos agora tratar da

Solução do exemplo 3. Dados $a,b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,1]$, temos, pela desigualdade triangular,

$$|(1-t)a+tb| \leq |(1-t)a|+|tb| = (1-t)|a|+t|b|,$$

o que verifica a convexidade da função modular. □

Funções quadráticas $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, com $\alpha > 0$, também são convexas, porém em um sentido mais forte, que passamos a descrever.

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que cada arco *aberto* do gráfico de f situa-se estritamente *abaixo* do segmento de reta *aberto* com mesmos extremos, dizemos que f é *estritamente convexa*.

Adaptando a discussão anterior, vemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa se, e somente se,

$$f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b), \tag{3}$$

quaisquer que sejam os pontos $a \neq b \in I$ e para cada $t \in (0,1)$.

Exemplo 4. *Toda função quadrática $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma, x \in \mathbb{R}$, é estritamente convexa se $\alpha > 0$.*

Solução. Verificaremos que f satisfaz a desigualdade estrita 3. De fato, fixados $a \neq b$ e $t \in (0,1)$, temos

$$(1-t)a^2+tb^2 > [(1-t)a+tb]^2,$$

pois, como o leitor pode verificar, tal relação equivale a $(1-t)t(a-b)^2 > 0$, que é verdadeira pela condições em a,b e

t. Portanto,

$$\begin{aligned}
f((1-t)a+tb) &= \alpha[(1-t)a+tb]^2+\beta[(1-t)a+tb]+\gamma \\
&< \alpha[(1-t)a^2+tb^2]+\beta[(1-t)a+tb]+\gamma \\
&= (1-t)(\alpha a^2+\beta a+\gamma)+t(\alpha b^2+\beta b+\gamma) \\
&= (1-t)f(a)+tf(b).
\end{aligned}$$

□

Observação 5. *A função modular é convexa, porém não estritamente.*

Se invertermos o sinal na desigualdade (2) (resp. (3)), teremos o conceito de função *côncava* (resp. *estritamente côncava*). Isso significa que o gráfico da função tem *concavidade para baixo*, ou seja, cada arco do gráfico dessa função situa-se *acima* do segmento de reta com mesmos extremos. [2]

Seguem das definições que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é côncava (resp. estritamente côncava) se, e só se, $-f$ é convexa (resp. estritamente convexa). Essa observação permite adaptar, para funções côncavas, os resultados já obtidos para funções convexas. Em particular, se $\alpha < 0$, a função quadrática $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ é estritamente côncava.

3 Derivada e concavidade

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa e $a < x < b$ pontos de I. Escrevendo $x = (1-t)a + tb$, com $t = (x-a)/(b-a)$, a substituição desses valores na relação (3) dá

$$f(x) < \left(\frac{b-x}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b).$$

Reescrevendo a desigualdade acima como

$$[f(x)-f(a)]\frac{b-x}{b-a} < [f(b)-f(x)]\frac{x-a}{b-a},$$

[2]Veja na página 10 da aula *Logaritmo como uma Função*, do módulo *Funções Logarítmicas*, gráficos genéricos de funções côncavas/convexas.

vem que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{4}$$

A interpretação dessa desigualdade é a seguinte: se AX e XB são cordas consecutivas do gráfico de uma função estritamente convexa (estando o ponto A "mais à esquerda"), a inclinação m_{ax} da reta $\overleftrightarrow{AX}$ é menor que a inclinação m_{xb} da reta $\overleftrightarrow{XB}$. Na verdade, essa propriedade caracteriza as funções estritamente convexas.

Nosso próximo resultado capta a relação acima utilizando retas tangentes em vez de secantes.

Teorema 6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então, f é estritamente convexa se, e somente se, a primeira derivada f' é crescente.*

Prova. Digamos que f seja estritamente convexa. Dados $a < b \in I$, tomemos x,y,z tais que $a < x < y < z < b$. Nas notações acima, temos $m_{ax} < m_{xy}$ e $m_{yz} < m_{zb}$. Fazendo $x \to a^+$ na primeira desigualdade e $z \to b^-$ na segunda, obtemos $f'(a) \le m_{ay}$ e $m_{yb} \le f'(b)$. Como $m_{ay} < m_{yb}$, segue que $f'(a) < f'(b)$ e f' é crescente.

Reciprocamente, suponhamos f' crescente. Dados $a < x_0 < b$ pontos de I, devemos provar que $m_{ax_0} < m_{x_0b}$. Com efeito, a regra $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ define uma função $g : I \to \mathbb{R}$ que admite x_0 como ponto de mínimo estrito, pois

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \begin{cases} < 0, \text{se } x < x_0 \\ > 0, \text{se } x > x_0 \end{cases}.$$

(Vide corolário 10 da aula anterior.) Assim, temos $g(x_0) < g(b)$, o que equivale a

$$f(x_0) < f(b) - f'(x_0)(b - x_0)$$

ou, ainda, a

$$f'(x_0) < \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = m_{x_0b}.$$

Um argumento análogo, agora utilizando a relação $g(x_0) < g(a)$, dá a desigualdade $m_{ax_0} < f'(x_0)$, permitindo a conclusão desejada, $m_{ax_0} < m_{x_0 b}$. □

Observação 7. *Com alguns ajustes na demonstração do teorema* (6), *podemos estabelecer a seguinte versão desse resultado:* se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável, então f é convexa se, e só se, f' é monótona não-decrescente.

A próxima proposição é bastante útil.

Corolário 8. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável, cuja segunda derivada f'' é positiva. Então, f é estritamente convexa.*

Prova. Como f' tem derivada positiva, f' é crescente. Pelo teorema anterior, f é estritamente convexa. □

Observação 9. *A recíproca do corolário anterior é falsa: a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^4$, é estritamente convexa, muito embora tenhamos $g''(0) = 0$. Por outro lado, se $f : I \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável, então f é convexa se, e só se, $f'' \geq 0$. De fato, pela observação* (7) *e o exemplo 15 da 1ª parte dessa aula, temos as equivalências: f* é convexa $\Leftrightarrow$ f' é monótona não-decrescente $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$.

Sendo $\frac{d^2(e^x)}{dx^2} = e^x > 0$, para cada número real x, o corolário anterior implica a convexidade estrita da função exponencial. Mais geralmente,

Exemplo 10. *Se $0 < a \neq 1$, a função exponencial de base a é estritamente convexa, pois $\frac{d^2(a^x)}{dx^2} = (\ln a)^2 a^x > 0, \forall\, x$.* □

Exemplo 11. *A função recíproco $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$, é estritamente convexa. Basta notar que $g''(x) = 2/x^3 > 0$, para cada real positivo x.* □

Adaptando os resultados dessa seção para funções côncavas (resp. estritamente côncavas), temos o

Exemplo 12. *A função logaritmo natural é estritamente côncava. De fato, $\frac{d^2(\ln x)}{dx^2} = -1/x^2 < 0$, para cada $x > 0$.* □

4 A desigualdade de Jensen

O próximo teorema, que dá nome à seção, generaliza, por meio de médias ponderadas quaisquer, a desigualdade (2).

Teorema 13. *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa e* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pontos do intervalo* I*. Então, para qualquer sistema de pesos* $t_1, t_2, \ldots, t_n$*, vale*

$$\begin{aligned} &f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq \\ &\quad \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, se f *é estritamente convexa e cada peso* t_i *é positivo, a igualdade em* (5) *ocorre se, e só se, os pontos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *forem iguais.*

Prova. Utilizaremos indução em $n \geq 2$. De acordo com as relações (2) e (3), a base de indução está verificada. Como hipótese, suponhamos a validade da desigualdade (5) para quaisquer n pontos em I e para qualquer sistema de n pesos. Se f for estritamente convexa e os pesos forem positivos, também devemos assumir que a igualdade ocorre se, e só se, os n pontos em I forem todos iguais.

Em um primeiro momento, provaremos que, dados $n+1$ pontos $x_1, \ldots, x_n, b \in I$ e um sistema de pesos $t_1, \ldots, t_n, t$, a imagem da média ponderada

$$y := t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + tb$$

por f não supera a respectiva média ponderada das imagens $f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)$, ou seja,

$$f(y) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) + tf(b). \tag{6}$$

Pois bem, se $t = 1$, então $t_1 = \cdots = t_n = 0$ e a relação (6) se reduz à identidade $f(b) = f(b)$. Por outro lado, caso tenhamos $t < 1$, valerá $t_1 + \cdots + t_n = 1 - t > 0$, o que permite escrever

$$y = (1-t)a + tb,$$

em que a é a média ponderada

$$\frac{t_1}{1-t}x_1 + \cdots + \frac{t_n}{1-t}x_n.$$

Assim, a base e a hipótese de indução dão

$$\begin{aligned}
f(y) &= f((1-t)a + tb) \\
&\leq (1-t)f(a) + tf(b) \\
&\leq (1-t)\left(\frac{t_1}{1-t}f(x_1) + \cdots + \frac{t_n}{1-t}f(x_n)\right) + tf(b) \\
&= t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n) + tf(b).
\end{aligned}$$

Para analisar o caso da igualdade na relação (6), suponhamos os pesos $t_1, \ldots, t_n, t$ positivos (sendo f estritamente convexa). Das estimativas acima, vemos que a igualdade em (6) implica

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b),$$

bem como

$$f\left(\frac{t_1}{1-t}x_1 + \cdots + \frac{t_n}{1-t}x_n\right) = \frac{t_1}{1-t}f(x_1) + \cdots + \frac{t_n}{1-t}f(x_n).$$

Por (3), a primeira dessas igualdades acarreta $a = b$, enquanto a segunda, por hipótese de indução, dá $x_1 = \ldots = x_n$. Como a é uma média ponderada dos $x_i's$, obtemos $x_1 = \ldots = x_n = a = b$.

$\square$

Tomando todos os pesos iguais na relação (5), segue o

Corolário 14. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, então*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{7}$$

Além disso, se f é estritamente convexa, a igualdade ocorre se, e só se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Uma aplicação imediata do corolário anterior é a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.

Exemplo 15. *A média aritmética não supera a média quadrática. Mais precisamente, se* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *são números reais positivos, então*

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}, \tag{8}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solução. De acordo com o exemplo 4, podemos tomar f no corolário 14 como a função quadrática de regra $f(x) = x^2$. Logo,

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}, \tag{9}$$

o que implica (8). O caso da igualdade ainda segue do referido corolário, uma vez que f é estritamente convexa. □

5 Algumas aplicações

Exemplo 16. *Sejam* a,b,c *números reais positivos tais que* $a+b+c=1$. *Mostre que*

$$\max\{a-ab,b-bc,c-ca\} \geq \frac{2}{9}. \tag{10}$$

Solução. Se a afirmação do enunciado fosse falsa, cada uma das expressões $a-ab,b-bc,c-ca$ seria menor que $2/9$. Daí, essas três desigualdades, quando somadas, dariam

$$(a+b+c)-(ab+bc+ca) < 3\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

Sendo $a+b+c=1$, poderíamos, então, reescrever a desigualdade anterior como

$$1-(ab+bc+ca) < \frac{2}{3} \Leftrightarrow ab+bc+ca > \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Por outro lado, a desigualdade (9) permite estimar a soma dos quadrados de a,b,c:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Logo, levando em conta a identidade

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)],$$

teríamos

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}[1 - (a^2 + b^2 + c^2)] \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

uma contradição com (11).

Portanto, nas hipóteses do problema, deve valer a desigualdade (10). $\square$

Exemplo 17. *Se u, v, w são números reais tais que $u+v+w = uvw$, mostre que*

$$\frac{1}{1+uv} + \frac{1}{1+vw} + \frac{1}{1+wu} \leq \frac{3}{4}.$$

Solução. De início, a função $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x/(1+x)$, é (estritamente) côncava [3]. Com efeito, um cálculo direto com a regra do quociente dá $f'(x) = 1/(1+x)^2$, para cada $x > -1$, mostrando que f' é decrescente. Pelo teorema 6 (adaptado para funções côncavas), segue-se que f é (estritamente) côncava.

Dividindo ambos os membros da relação $u+v+w = uvw$ por uvw, obtemos

$$\frac{1}{uv} + \frac{1}{vw} + \frac{1}{wu} = 1,$$

[3] Se a regra $y = g(x)$ determina uma função convexa (resp. côncava), também é convexa (resp. côncava), em um domínio adequado, a função definida pela sentença $y = g(x+k) + l$, quaisquer que sejam os números reais k e l. Nesse sentido, notando que $f(x) = 1 - 1/(1+x)$, o leitor é convidado a justificar a observação feita no texto a partir do exemplo 11, atentando aos comentários que finalizaram a 2ª seção.

de sorte que $t_1 = 1/uv, t_2 = 1/vw, t_3 = 1/wu$ formam um sistema de pesos. Tomando $x_1 = uv, x_2 = vw, x_3 = wu$ na desigualdade de Jensen (5) (com a desigualdade invertida, pois trata-se da versão para funções côncavas), vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+uv} + \frac{1}{1+vw} + \frac{1}{1+wu} = \\
&= \frac{1}{uv} \cdot f(uv) + \frac{1}{vw} \cdot f(vw) + \frac{1}{wu} \cdot f(wu) \\
&\le f\left(\frac{1}{uv} \cdot uv + \frac{1}{vw} \cdot vw + \frac{1}{wu} \cdot wu\right) \\
&= f(3) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 18 (IMO 2001, Problema 2). *Sejam a,b,c números reais positivos. Prove que*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1.$$

Solução. Agora, utilizaremos a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/\sqrt{x}$, de modo que $f(x)^2 = 1/x$. Como f é derivável, a igualdade anterior implica $2f'(x)f(x) = -1/x^2$, isto é, $f'(x) = -1/2x^{3/2}$, para cada $x > 0$. Daí, é fácil concluir que f' é crescente, o que, de acordo com o teorema 6, garante a convexidade de f. Utilizando a desigualdade de Jensen com pesos

$$\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$$

e números

$$a^2+8bc, b^2+8ca, c^2+8ab,$$

obtemos

$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)$$

$$= \frac{a}{a+b+c} \cdot f(a^2+8bc) + \frac{b}{a+b+c} \cdot f(b^2+8ca) +$$
$$\frac{c}{a+b+c} \cdot f(c^2+8ab)$$
$$\geq f\left(\frac{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}{a+b+c}\right)$$
$$= f\left(\frac{a^3+b^3+c^3+24abc}{a+b+c}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}},$$

e a solução estará encerrada se provarmos que

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc. \qquad (12)$$

Expandindo o primeiro membro da desigualdade anterior e cancelando os cubos, obtemos a desigualdade equivalente

$$3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+6abc \geq 24abc,$$

que também pode ser escrita como

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \geq 6abc. \qquad (13)$$

Como o leitor pode verificar, a relação anterior é uma consequência imediata da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (para os seis números $a^2b, \ldots, ca^2$).

Alternativamente, poderíamos dividir ambos os membros da desigualdade (13) por abc e obter

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq 6,$$

relação que, comutando as parcelas de posições 2 e 5 no 1º membro, pode ser reescrita na forma

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 6. \qquad (14)$$

Notando que, para quaisquer números positivos x,y, vale $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, pois

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0,$$

vemos que cada expressão dentro dos parênteses no 1º membro da desigualdade (14) é ≥ 2, justificando aquela desigualdade.

De todo modo, como as relações (12), (13) e (14) são equivalentes, segue a veracidade de (12) e, portanto, da desigualdade proposta. □

Dicas para o Professor

Com o corolário 8, obtemos uma solução direta do exemplo 4, já que $f'' \equiv \alpha > 0$. Todavia, a solução mais elementar apresentada permite que o professor justifique em sala, caso convenha, a discussão do tipo de concavidade do gráfico de uma função quadrática em função de seu coeficiente líder.

Funções convexas (ou côncavas) são, essencialmente, contínuas. Mais precisamente, se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa, então f é contínua no *interior* do intervalo I. Esboçaremos os principais pontos da demonstração, deixando os detalhes ao encargo do leitor. Pois bem, fixado b no interior de I, seja $J = \{x \in I \,|\, x < b\}$, um intervalo admitindo b como extremo superior. Agora, defina $g : J \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, isto é, $g(x) = m_{xb}$. Afirmamos que g é monótona não-decrescente e limitada superiormente. Com efeito, fixe $c \in I$ e sejam a,x pontos de J tais que $a < x < b < c$. Como vimos no texto, vale $m_{ax} \leq m_{xb} \leq m_{bc}$. Por outro lado, como m_{ab} é uma média ponderada de m_{ax} e m_{xb}, qual seja,

$$m_{ab} = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) m_{ax} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right) m_{xb},$$

segue-se que $m_{ab} \leq m_{xb}$. Dessa forma, temos

$$g(a) \leq g(x) \leq m_{bc},$$

justificando a afirmação acima. Portanto, existe

$$\lim_{x \to b^-} g(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

ou seja, f é derivável à esquerda no ponto b.

De forma similar prova-se que f é derivável à direita no ponto b. Pela proposição 4 da 1ª parte dessa aula, f é contínua em b e, portanto, f é contínua no interior de I.

Uma última observação: é possível que uma função convexa *não* seja contínua em algum dos (ou em ambos os) extremos de seu intervalo domínio. Por exemplo, a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, de regra

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{se } x > 0 \\ 1, \text{se } x = 0 \end{cases},$$

é convexa e descontínua na origem.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.