Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Notação Científica e Dízimas Periódicas

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

Portal da Matemática
OBMEP

1 Notação científica

A notação científica foi introduzida para facilitar o modo de operar com números muito grandes ou muito pequenos. Antes de definir tal conceito, vejamos alguns exemplos, com o objetivo de facilitar a compreensão.

Exemplo 1. *Considere o número racional* 478589. *Podemos escrevê-lo da forma* $4,78589 \cdot 100000$, *ou seja,*

$$478589 = 4,78589 \cdot 10^5.$$

Exemplo 2. *Observe, agora, que o número racional* $0,003456$ *pode ser escrito como*

$$\frac{3456}{1000000} = \frac{3,456 \cdot 10^3}{10^6} = 3,456 \cdot \frac{10^3}{10^6},$$

ou seja,

$$0,003456 = 3,456 \cdot 10^{-3}.$$

Generalizando os exemplos acima, dizemos que um número racional $a > 0$ está escrito em **notação científica** se está sob a forma

$$a = b \cdot 10^n, \tag{1}$$

em que b é um número racional em sua representação decimal, satisfazendo $1 \leq b < 10$, e n é um número inteiro.

Exemplo 3. *Abaixo, listamos algumas grandezas representadas em notação científica.*

(a) A massa da Terra é aproximadamente $5,98 \cdot 10^{24} kg$.

(b) A velocidade da luz é aproximadamente $3 \cdot 10^5 km/s$.

(c) A população mundial já supera $7 \cdot 10^9$ *habitantes.*

Para o que segue, definimos **parte inteira** de um número racional a, denotada $\lfloor a \rfloor$, como o maior inteiro que é menor ou igual a a. Por exemplo, $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,4 \rfloor = 2$, $\lfloor 15,97 \rfloor = 15$ e $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$.

> Quando o número racional $a = b \cdot 10^n$ está escrito em notação científica, a parte inteira de b satisfaz $1 \leq \lfloor b \rfloor \leq 9$, ou seja, possui exatamente um algarismo.

2 Dízimas Periódicas

Os números racionais podem ser representados em notação decimal. Temos, por exemplo,

$$\frac{79}{10} = 7,9 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = 0,25.$$

Entretanto, há números racionais cuja representação decimal não é finita. Veja os exemplos abaixo:

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots \quad \text{e} \quad \frac{15}{11} = 1,363636\ldots$$

Nesses dois exemplos, a representação decimal dos números racionais em questão é infinita, mas possui uma *parte que se repete.*

Chamamos **dízima periódica** a representação decimal de um número racional que possui um número infinito de casas decimais. Nas dízimas periódicas, sempre há uma parte que se repete, que será chamada **período** ou **parte periódica**. A parte que fica à direita da vírgula e não compõe o período pode ou não existir; se existir, ela será chamada de **anteperíodo** ou **parte não periódica**. Se a dízima não possui parte não periódica, dizemos que ela é uma **dízima periódica simples**; caso contrário, isto é, se a dízima possui uma parte não periódica, dizemos que é uma **dízima periódica composta**.

Exemplo 4.

(i) $0,838383\ldots$ *é uma dízima periódica simples, que tem* 83 *como período. Note que* $0,838383\ldots$ *não possui anteperíodo.*

(ii) $3,1555\ldots$ *é uma dízima periódica composta, cujo período é* 5 *e anteperíodo é* 1.

(iii) $43,567890890890\ldots$ *é uma dízima periódica composta. Possui* 890 *como período e* 567 *como anteperíodo.*

Uma notação alternativa para as dízimas periódicas do exemplo 4 é $0,\overline{83}$ para a dízima do item (i), $3,1\overline{5}$ para a do item (ii) e $43,567\overline{890}$ para a do item (iii). Observe que pusemos uma barra sobre o período.

Agora, observemos os exemplos abaixo, pois eles tornarão evidente a existência de um critério para diferenciar as frações que possuem representação decimal finita das que geram dízimas periódicas. Além disso, **eles também indicarão** quantos algarismos o anteperíodo terá (no caso de dízimas periódicas compostas).

Exemplo 5.

(i) A fração $\frac{7}{50}$ *possui representação decimal finita. Observe que* $50 = 2 \cdot 5^2$, *de forma que*

$$\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 5^2} = \frac{14}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{14}{100} = 0,14.$$

(ii) A fração irredutível $\frac{15}{11}$ *gera uma dízima periódica simples, pois*

$$\begin{array}{r|l} 15 & 11 \\ \hline 40 & 1,363636\ldots \\ 70 & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

Observe que no denominador não aparecem fatores primos iguais a 2 *ou* 5.

(iii) *A fração irredutível $\frac{42}{55}$ gera uma dízima periódica composta, pois*

$$\begin{array}{r|l} 420 & \quad 55 \\ \hline 350 & 0,7636363\ldots \\ 200 & \\ 350 & \\ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

Neste caso, a decomposição do denominador em fatores primos é $55 = 5 \cdot 11$. Portanto, aparecem tanto fatores primos iguais quanto diferentes de 2 ou 5. Além disso, o maior expoente dentre as potências de 2 ou 5 que aparecem é 1. Note que o anteperíodo possui exatamente um algarismo.

(iv) *A fração irredutível $\frac{11}{300}$ gera uma dízima periódica composta, pois*

$$\begin{array}{r|l} 1100 & \quad 300 \\ \hline 2000 & 0,03666\ldots \\ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

Note que o denominador da fração se decompõe como $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Note que também aparecem tanto fatores iguais quanto diferentes de 2 ou 5, mas neste caso o maior expoente dentre as potências de 2 ou 5 é 2. Observe que o anteperíodo possui exatamente dois algarismos.

Podemos resumir as observações feitas nos exemplos acima na proposição a seguir.

Proposição 6. *Seja $a = \frac{p}{q}$ uma fração irredutível, isto é, tal que p e q são números naturais com $mdc(p, q) = 1$.*

(i) *Se, na decomposição do denominador q como produto de fatores primos, aparecem apenas os primos 2 ou 5, então a representação decimal de a é finita.*

(ii) *Se, na decomposição do denominador q como produto de fatores primos, aparece algum primo diferente de 2 ou 5, então a representação decimal de a é uma dízima periódica. Além disso, se os primos que aparecem na decomposição de q são todos diferentes de 2 ou 5, então a dízima é simples, e se aparece algum fator igual a 2 ou 5, então a dízima é composta.*

(iii) *No caso em que a fração gera uma dízima periódica composta, o valor do maior expoente dentre as potências de 2 ou 5 que aparecem na decomposição do denominador em fatores primos é igual ao número de algarismos do anteperíodo.*

Observação 7. *Uma dízima periódica representa uma soma infinita. Por exemplo,*

$$\begin{aligned} 0,333\ldots &= 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots \end{aligned}$$

*Uma sucessão do tipo $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \ldots$, em que cada termo é obtido do anterior multiplicando-se este por um número real fixo (no caso acima, $\frac{1}{10}$), é chamada uma **Progressão Geométrica** (ou simplesmente uma **PG**); o número que é multiplicado por um termo para obter o termo seguinte é a **razão** da PG. Quando uma PG com infinitos termos é tal que sua razão é um número real positivo e menor do que 1, pode ser mostrado que a soma dos infinitos termos da PG tem sentido. Portanto, as dízimas periódicas fazem sentido.*

Observação 8. *Existem números que não têm representação decimal finita nem podem ser representados por dízimas periódicas. Esses números possuem uma representação decimal infinita, mas sem período. Eles são conhecidos como os **números irracionais**.*

Exemplo 9. *O número $0,01001000100001\ldots$, onde em cada passo acrescentamos um 0 a mais entre dois algarismos 1, não é periódica, pois há sequências tão grandes quanto queiramos formadas somente por algarismos iguais a zero e contidas em sua parte decimal.*

3 A geratriz de uma dízima periódica

Uma **fração geratriz** de uma dízima periódica é uma fração cuja representação decimal é a dízima periódica. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é uma fração geratriz da dízima periódica $0,333\ldots$.

Para encontrar a dízima periódica gerada por uma fração irredutível na qual aparecem fatores primos diferentes de 2 ou 5 no denominador, basta fazer a divisão do numerador pelo denominador. A pergunta a qual responderemos nesta seção é a recíproca, isto é, como encontrar a fração geratriz de um dízima periódica dada?

Observe os exemplos abaixo.

Exemplo 10. *Para encontrar uma fração geratriz da dízima periódica $0,888\ldots$, fazemos $a = 0,888\ldots$ e, daí,*

$$\begin{array}{rcr} 10a & = & 8,888\ldots \\ -a & = & -0,888\ldots \\ \hline \Rightarrow 9a & = & 8 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{8}{9}. \end{array}$$

Exemplo 11. *Para encontrar uma geratriz para a dízima periódica $1,454545\ldots$, fazemos $a = 1,454545\ldots$ e, a par-*

tir daí,

$$\begin{array}{rcl} 100a & = & 145,454545\ldots \\ -a & = & -1,454545\ldots \\ \hline \Rightarrow 99a & = & 144 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{144}{99} = \dfrac{16}{11}. \end{array}$$

Resumimos os exemplos acima na seguinte regra para a obtenção de frações geratrizes de dízimas periódicas simples:

> Para encontrar uma fração geratriz de uma dízima periódica simples, multiplicamos a dízima pela potência de 10 cujo expoente é a quantidade de algarismos do período e subtraímos a dízima do resultado.

Agora, veja os seguintes exemplos:

Exemplo 12. *Para encontrar uma fração geratriz da dízima periódica $8,32444\ldots$, fazemos $a = 8,32444\ldots$ e, daí, temos*

$$\begin{array}{rcl} 1000a & = & 8324,444\ldots \\ -100a & = & -832,444\ldots \\ \hline \Rightarrow 900a & = & 7492 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{7492}{900} = \dfrac{1873}{225}. \end{array}$$

Exemplo 13. *Para encontrar uma fração geratriz para a dízima periódica $1,42343434\ldots$, fazemos $a = 1,42343434\ldots$ e, então, temos*

$$\begin{array}{rcl} 10000a & = & 14234,343434\ldots \\ -100a & = & -142,343434\ldots \\ \hline \Rightarrow 9900a & = & 14092 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{14092}{9900} = \dfrac{3523}{2475}. \end{array}$$

Como antes, os exemplos acima geram a regra a seguir, para a obtenção de frações geratrizes de dízimas periódicas compostas:

> Para encontrar uma fração geratriz de uma dízima periódica composta, multiplicamos a dízima pela potência de 10 cujo expoente é a soma da quantidade de algarismos do período com a quantidade de algarismos do anteperíodo; em seguida, multiplicamos a dízima pela potência de 10 cujo expoente é a quantidade de algarismos do anteperíodo e, por fim, subtraímos os resultados.

Observação 14. *Qualquer fração equivalente a uma fração geratriz de uma dízima periódica também será chamada uma fração geratriz dessa dízima. Entretanto, para cada dízima periódica, existe somente uma fração geratriz que é irredutível.*

Exemplo 15. *Agora, vejamos como encontrar a fração geratriz da dízima periódica $0,999\ldots$. Repetindo o processo visto acima, fazemos $a = 0,999\ldots$ e, assim,*

$$\begin{array}{rcl} 10a & = & 9,999\ldots \\ -a & = & -0,999\ldots \\ \hline \Rightarrow 9 & = & 9 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{9}{9} = 1. \end{array}$$

Apesar de curiosa, a igualdade $0.999\ldots = 1$ é verdadeira. De fato, repetindo o argumento utilizado acima, podemos mostrar que vale a igualdade $n,999\ldots = n + 1$, em que n é um número inteiro não negativo.

Dicas para o Professor

Reserve uma sessão de 50min para cada uma das três seções. Um ponto fundamental, que você deve observar quando falar de dízimas periódicas, é que elas representam somas infinitas. Entretanto, evite falar na fórmula utilizada para calcular a soma de progressões geométricas infinitas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. S. Hazzan e G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes Determinantes e Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.