Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Funções e Geometria

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

04 de maio de 2020

1 Funções envolvendo medidas

Nesta seção, exibiremos exemplos de funções que relacionam medidas em figuras geométricas.

Exemplo 1. *O triângulo ABC está inscrito em um círculo de diâmetro BC, tal que $\overline{BC} = 10cm$. Seja H o pé da perpendicular baixada desde o vértice A ao lado BC.*

(a) Calcule $\overline{AH}$ em função de $\overline{BH}$.

(b) Calcule $\overline{AH}$ em função de $\overline{CH}$.

Solução. Como o lado BC é um diâmetro do círculo, o triângulo ABC é retângulo em A; assim, o segmento AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$, então $h = \sqrt{mn}$. Esta é uma das relações métricas em triângulos retângulos, mas, se você não recordá-la, pode chegar a esse resultado usando a semelhança $\Delta ABH \sim \Delta CAH$ (pelo caso AA), de onde segue que $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, ou seja, $h^2 = mn$.

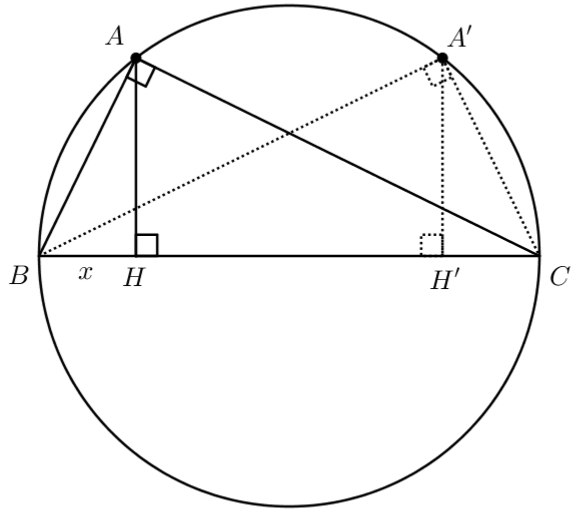

Figura 1: o triângulo ABC e seu simétrico $A'BC$.

Agora, $m + n = 10cm$. Se $m = x$, então $n = 10 - x$ e $h = h(x) = \sqrt{x(10-x)}$. Se $n = x$, então $m = 10 - x$ e $h = h(x) = \sqrt{(10-x)x}$. Observe que a função h é a mesma, quer $x = m$, quer $x = n$. Essa simetria pode ser percebida geometricamente notando-se que, para cada triângulo ABC dado, existe um triângulo $A'BC$ (veja a Figura 1) tal que $\overline{CH'} = \overline{BH}$. Para esses dois triângulos, $\overline{AH} = \overline{A'H'}$. Isso corresponde a considerar $\overline{BH} = x$ ou $\overline{CH} = x$ na expressão da função h, sem alterar a função.

Para que $h(x)$ seja um número real positivo, x deve pertencer ao intervalo aberto $(0, 10)$. Este é, portanto, o domínio da função h. □

Exemplo 2. *Em um triângulo isósceles ABC, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$. Se a mediana AN mede $9cm$, calcule o comprimento da mediana CM, em função do comprimento do lado AC.*

Solução. Seja $\overline{AC} = x$ e $\overline{CM} = m$. Queremos encontrar uma expressão $m(x)$ de m em função de x.

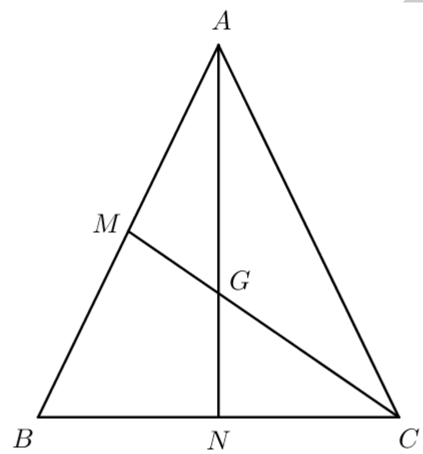

Figura 2: o triângulo ABC e duas de suas medianas.

Recorde que o baricentro G, divide as medianas AN e CM na razão $2:1$ a partir de cada vértice, o que significa que $\overline{CG} = \frac{2m}{3}$ e $\overline{GN} = \frac{\overline{AN}}{3} = 3cm$.

Como o triângulo ABC é isósceles com base BC, a mediana AN também é altura. Logo, o triângulo CGN é retângulo em N, de sorte que, aplicando o Teorema de Pitágoras ao mesmo, obtemos $\overline{CN}^2 + \overline{GN}^2 = \overline{CG}^2$, ou seja, $\overline{CN}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GN}^2$. Assim,

$$\overline{CN}^2 = \left(\frac{2m}{3}\right)^2 - 3^2 = \frac{4m^2}{9} - 9.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABN, obtemos: $\overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BN}^2$. Como AN é mediana, $\overline{BN} = \overline{CN}$. Assim,

$$\begin{aligned} x^2 &= \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{BN}^2 \\ &= 9^2 + \overline{CN}^2 = 81 + \frac{4m^2}{9} - 9 \\ &= \frac{4m^2}{9} + 72. \end{aligned}$$

Como queremos expressar m em função de x, devemos resolver a igualdade $x^2 = \frac{4m^2}{9} + 72$ para m, obtemos $m^2 = \frac{9x^2}{4} - 162$. Logo,

$$m(x) = \sqrt{\frac{9x^2}{4} - 162}. \qquad (1)$$

Consideramos apenas a solução positiva da equação porque m é medida de um segmento. Para que m seja um número real positivo, devemos ter $\frac{9x^2}{4} - 162 > 0$, o que é equivalente a $9x^2 > 648$, ou seja, $x^2 > 72$. Logo, devemos ter $x > 6\sqrt{2} \cong 8,4$. $\square$

Exemplo 3. *Se a, b e c são os comprimentos dos lados e $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o perímetro de um triângulo ABC, então a* fórmula de Herão *diz que a área de ABC é dada por*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (2)$$

Suponha que alguém tenha sido apresentado à fórmula (2) há muito tempo, mas não lembre exatamente como ela é. Há apenas lembranças vagas, como a presença (difícil de esquecer) de uma raiz quadrada na fórmula. Sob a raiz, uma expressão que depende apenas dos lados do triângulo (isso também é fácil de lembrar, pois é o grande mérito da fórmula).

A dimensão da área é o quadrado da dimensão do comprimento, ou seja, a expressão final deve ter "grau" dois. Isso nos leva a pensar que, sob a raiz, deve aparecer um polinômio de grau quatro, que é produto de quatro fatores de grau 1, algo do tipo

$$\sqrt{P} = \sqrt{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4},$$

onde $\operatorname{grau} P = 4$ e $\operatorname{grau} q_i = 1$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Esses quatro polinômios, q_1, q_2, q_3, q_4, dependem das medidas a, b e c, dos lados do triângulo. Se $a + b = c$, então o triângulo é degenerado, logo tem área zero. Isso significa que o polinômio $a + b - c$, de grau 1 nas três "variáveis" a, b e c, é um fator de P, ou seja, é um dos q_i. De modo similar, $a + c - b$ e $b + c - a$ também são fatores de P. Isso nos permite encontrar três dos quatro polinômios q_i.

O quarto fator de P tem que ser um polinômio de grau 1, que dependa de a, b e c, e que seja *simétrico* em relação a essas três variáveis. De fato, a troca de posição, na fórmula, entre duas dessas três variáveis não deve alterar a área do triângulo, logo, não deve alterar $P = q(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$. Como $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ não muda se permutarmos as posições de duas das três variáveis, o polinômio q deve ficar inalterado por qualquer permutação de duas dentre as três variáveis. Assim, a única opção para q é $q = k(a + b + c)$, onde k é uma constante, e a área do triângulo deve ser dada por

$$K\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}, \qquad (3)$$

onde $K = \sqrt{k}$ é uma constante. Podemos obter o valor de K analisando o que ocorre para um triângulo particular. Um exemplo simples é fornecido pelo triângulo retângulo cujos lados são $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. Neste caso, a área é igual a 6, logo,

$$6 = K\sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 24K$$

e isso implica que $K = \frac{1}{4}$. Com esse valor, (3) se torna (2).

Observação 4. *Na sugestão de leitura complementar* [3], *página 89, os autores exibem o argumento heurístico*[1] *acima (bastante original, embora não rigoroso) para justificar a validade, ou pelo menos a "naturalidade" da fórmula* (2) *como uma ideia que poderia ter ocorrido a Richard Feynmam (1918–1988, Físico estudunidense, prêmio Nobel de Física em 1965). Feynmam era notoriamente conhecido por ser muito habilidoso em explicar ideias sutis de modo simples.*

Observação 5. *A expressão* (2) *para a área do triângulo, em função dos comprimentos de seus lados é conhecida como* fórmula de Herão*, embora o próprio Herão, em seu tratado* Métrica*, a tenha apresentado como um* método*, e não como uma fórmula. Nesse mesmo tratado, Herão apresenta uma demonstração de* (2)*. Segundo Sir Thomas Heath, o autor árabe Abu'l Raihan al-Biruni menciona que a expressão* (2) *já era conhecida por Arquimedes. É possível que o resultado constasse numa obra perdida de Arquimedes, chamada* Sobre triângulos*. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes na sugestão de leitura complementar* [4]*.*

Exemplo 6. *Escreva a área de um triângulo equilátero em função do comprimento comum de seus lados.*

Solução. Fazendo $a = b = c = x$ em (2), obtemos $s = \frac{3x}{2}$ e

$$\begin{aligned} A(x) &= \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2} - x\right)\left(\frac{3x}{2} - x\right)\left(\frac{3x}{2} - x\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Dizemos que um retângulo está inscrito em um círculo quando seus quatro vértices pertencem a esse círculo. Suponha que o retângulo $ABCD$ está inscrito num círculo de raio r fixado, conforme mostrado na Figura 3.*

(a) *Expresse a área desse retângulo em função de um de seus lados.*

(b) *Dentre todos os retângulos inscritos no círculo, encontre aqueles que têm a maior área possível.*

Solução.
(a) Nas notações da Figura 3, a área S do retângulo $ABCD$ é o produto de suas dimensões x e y, de forma que

$$S = xy.$$

[1] Heurística é a ciência que tem por objeto a descoberta de fatos.

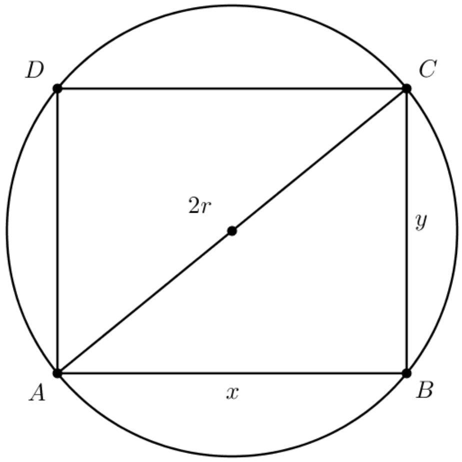

Figura 3: o retângulo $ABCD$ está inscrito no círculo de raio r.

No entanto, os comprimentos x e y são relacionados pelo fato do retângulo estar inscrito no círculo. A fim de descobrir tal relação, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, obtendo

$$x^2 = y^2 = 4r^2.$$

Portanto, $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ e, sendo r uma constante, concluímos que a área S depende apenas de x:

$$S(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2x^2 - x^4}.$$

(b) A área é a maior possível quando o radicando $f(x) = 4r^2x^2 - x^4$ na expressão de $S(x)$ for o maior possível. Fazendo $x^2 = u$, temos $f(x) = g(u)$, com $g(u) = 4r^2u - u^2$. Como já vimos no Módulo Funções - Parte 1, aula Monotonicidade, Máximos e Mínimos, Proposição 7, o valor máximo de g, e portanto de S, é atingido quando $u = -\frac{b}{2a} = -\frac{4r^2}{2(-1)} = 2r^2$. Neste caso, $x^2 = 2r^2$, logo, $x = r\sqrt{2}$ (a raiz negativa não convém, uma vez que x é um comprimento). Portanto,

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2} = x,$$

e concluímos que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo é um quadrado. □

2 Coordenadas e parâmetros

Retas, círculos e outras figuras mais sofisticadas, como parábolas e espirais, podem ser vistas de dois modos distintos:

(1) como um conjunto de pontos que compartilham determinada propriedade;

(2) como a trajetória de um ponto em movimento.

Quando a descrição do objeto geométrico é dada como em (1), costumamos dizer que ele é um *lugar geométrico*. Nesse caso, se possível, é de grande valia escrever a propriedade que caracteriza o conjunto de pontos como uma relação entre as coordenadas dos pontos, uma equação.

Exemplo 8. *O conjunto formado por todos os pontos que estão à distância* 1 *da origem é um círculo. Se* $P = (x, y)$ *é um ponto desse círculo, então a distância até a origem é dada pela expressão* $\sqrt{x^2 + y^2}$. *Assim, dizer que a distância até a origem é igual a* 1 *é o mesmo que dizer que* $x^2 + y^2 = 1$. *Esta é, portanto, a equação desse círculo.*

Na descrição em (2), o ponto em movimento tem sua posição controlada por (pelo menos) uma variável independente, que chamamos de *parâmetro*. Se for possível escrever as coordenadas do ponto em função desse parâmetro, as expressões para cada coordenada são chamadas de *equações paramétricas*; por sua vez, ao considerarmos todas essas equações em conjunto, obtemos uma *parametrização* do objeto.

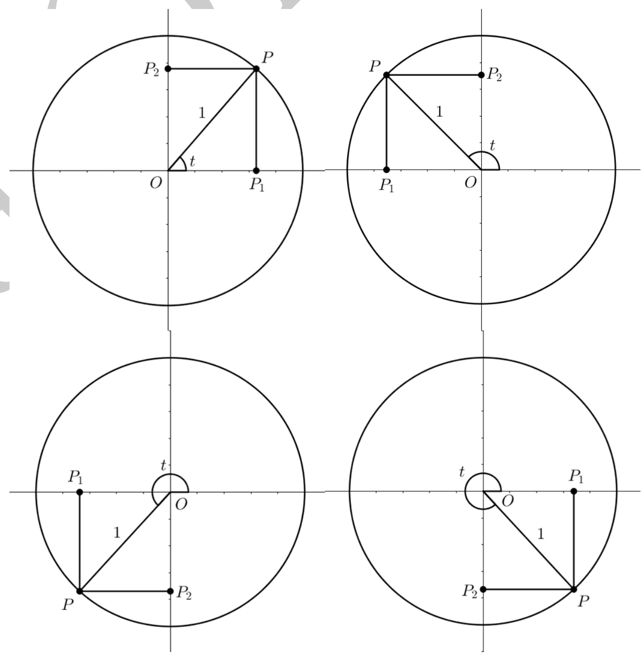

Figura 4: o ponto P sobre o círculo e o ângulo t, que é um parâmetro.

Exemplo 9. *O mesmo círculo do Exemplo 8 pode ser visto como a trajetória de um ponto* P *em movimento. Seja* $P = (x, y)$ *um ponto pertencente ao círculo de raio* 1 *centrado na origem (Figura 4). No triângulo retângulo* OPP_1, $OP_1 = \cos t$ *e* $OP_2 = \operatorname{sen} t$, *onde* OP_1 *e* OP_2 *denotam segmentos orientados. Assim, as coordenadas do ponto* P, *dadas por* OP_1 *e* OP_2, *podem ser colocadas em função de*

t, de sorte que $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \operatorname{sen} t$ são as equações paramétricas desse círculo. Veja que a equação $x^2+y^2 = 1$ é equivalente à identidade $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

Exemplo 10. *Um círculo de raio 1, a princípio centrado no ponto $(0, 1)$, rola sobre o eixo x, sem deslizar. O ponto, que, no início do movimento, está na origem, descreve uma curva, chamada **cicloide** (Figura 5). Encontre as coordenadas de um ponto sobre a cicloide, dependendo de um parâmetro.*

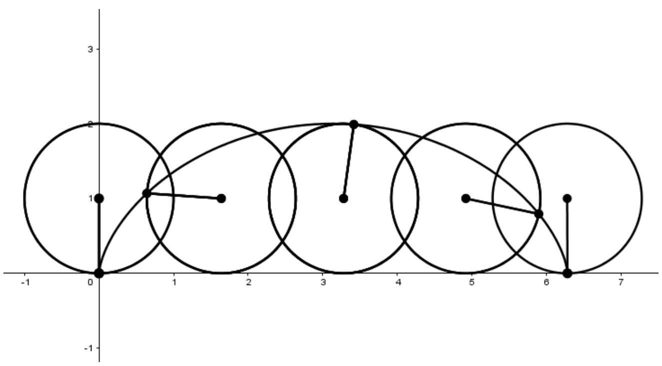

Figura 5: algumas posições do círculo durante o rolamento e a cicloide resultante.

Solução. Vamos adotar como parâmetro o ângulo t, medido no sentido anti-horário, entre a vertical e o raio móvel OP que liga o centro O do círculo que gira ao ponto P cujo rastro é a cicloide (Figura 6). Queremos encontrar as coordenadas de P em função desse ângulo t, ou seja, escrever $P = P(t) = (x(t), y(t))$.

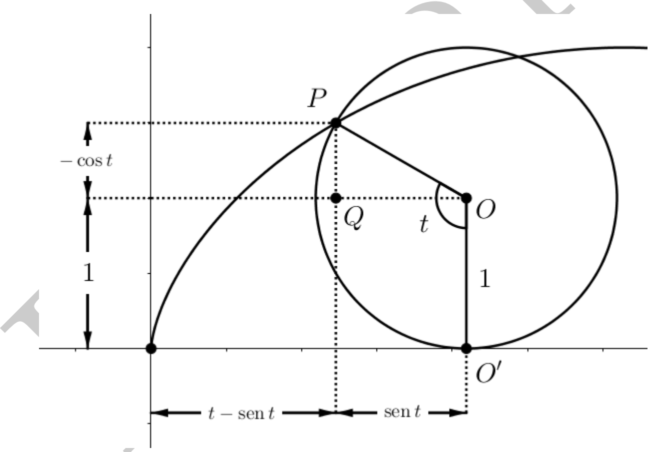

Figura 6: o ângulo t e as coordenadas do ponto cujo rastro é a cicloide.

Na Figura 6, o triângulo OPQ é retângulo em Q e o ângulo $\angle POQ$ mede $t - Q\widehat{O}O' = t - 90°$. Como o raio do círculo é $\overline{OP} = 1$, temos, pela definição de seno e cosseno, que

$$\overline{OQ} = \cos(t - 90°) = \operatorname{sen} t$$

e

$$\overline{PQ} = \operatorname{sen}(t - 90°) = -\cos t.$$

O arco $O'P$ sobre o círculo tem medida t, em radianos, e essa medida é igual à distância, ao longo do eixo x, do ponto O' à origem. Isso ocorre porque o círculo rola sobre o eixo x sem deslizar. Como $\overline{OQ} = \operatorname{sen} t$, a abscissa de P é $x(t) = t - \operatorname{sen} t$. Já a ordenada de P é $y(t) = 1 + \overline{PQ} = 1 - \cos t$, como pode se ver na Figura 6.

Portanto, as coordenadas de P são $x(t) = t - \operatorname{sen} t$ e $y(t) = 1 - \cos t$. Quando t varia entre 0 e 2π, o ponto P descreve um arco de cicloide como o da Figura 5.

A tabela (4) nos informa sobre os sinais das funções seno e cosseno.

t	$\cos t$	$\operatorname{sen} t$
$0 < t < \pi/2$	$+$	$+$
$\pi/2 < t < \pi$	$-$	$+$
$\pi < t < 3\pi/2$	$-$	$-$
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$+$	$-$

(4)

A partir dela, podemos saber a posição do ponto P em relação ao centro O do círculo que rola, gerando a cicloide. Por exemplo, se $0 < t < \pi/2$, então $\cos t > 0$ e $\operatorname{sen} t > 0$, logo, $x(t) = t - \operatorname{sen} t < t$ e $y(t) = 1 - \cos t < 1$, o que indica que P está abaixo e à esquerda de O. À medida que a rolagem do círculo avança, essa posição relativa muda: se $\pi/2 < t < \pi$, então $\cos t < 0$ e $\operatorname{sen} t > 0$, logo, $x(t) = t - \operatorname{sen} t < t$ e $y(t) = 1 - \cos t > 1$, o que indica que P continua à esquerda de O, mas agora está acima de O. Esta é exatamente a situação mostrada na Figura 6. $\square$

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

A geometria é um assunto pródigo em fornecer relações entre objetos que podem ser medidos e, portanto, relações entre as medidas desses objetos, ou seja, exemplos de funções. Essas relações podem ser usadas na resolução de problemas de otimização, como no Exemplo 7.

A descrição de curvas ou de superfícies usando parâmetros é de grande utilidade no estudo desses objetos. Você pode explorar o Exemplo 10 um pouco mais: a cicloide é uma curva com propriedades notáveis. Por exemplo, se você quiser construir um escorregador pelo qual se possa escorregar *o mais rapidamente* possível, ele deve ter o formato de um arco de cicloide. A determinação de uma curva com esta propriedade é chamada de *Problema da Baquistócrona* e tem uma história interessante, envolvendo personagens importantes, como Johann e Jacob Bernoulli, Isaac Newton, G. W. Leibniz e o Marquês de L'Hôpital. Veja as sugestões de leitura [5] ou [6].

Mais exemplos e resultados podem ser vistos nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
3. I.M. Gelfand, M. Saul. *Trigonometry*, Birkhäuser, 2001.
4. Herão de Alexandria. *Metrica*. Tradução para o inglês por Henry Mendell. Disponível em `https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/HeroAlexandrinus/Metrica.i.1-9/Metrica.I.1-9.html#preamble`.
5. `https://pt.wikipedia.org/wiki/Braquist%C3%B3crona`.
6. Ana Luísa S. Tagliolatto. *Baquistócrona*. Disponível em `https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138443/000864520.pdf?sequence=1&isAllowed=y`.