

**Material Teórico - Módulo: Vetores em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$**

**Operações Envolvendo Vetores**

**Terceiro Ano - Médio**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



# 1 Adição de vetores

Na aula anterior deste mesmo módulo (*Conceito de Vetor*), estudamos a noção de vetor como uma coleção de segmentos orientados equipolentes. Vimos, ainda, que a relação de equipolência é uma relação de equivalência e que, portanto, determina sobre o conjunto dos segmentos orientados uma partição em subconjuntos disjuntos, chamados classes de equivalência, sendo cada classe formada por segmentos orientados com mesma direção, sentido e comprimento. Sugerimos ao leitor que reveja essa aula anterior antes de começar a presente aula, para ter firme em sua mente a noção de vetor, que será essencial no que segue.

Agora, nosso interesse é estabelecer certas *operações* entre vetores. Essas operações devem ser entendidas como uma maneira de descrever fenômenos geométricos usando a linguagem algébrica. Pretendemos deixar isso claro ao longo da exposição.

Consideremos dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . O Teorema 3 da aula *Conceito de Vetor* garante que, dado um ponto  $A$ , existe um segmento orientado  $AB$  que representa  $\vec{v}$ , ou seja, tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  (veja a figura 1). Esse mesmo teorema garante que existe um segmento orientado  $BC$  tal que  $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ . De posse de tais segmentos orientados, chamamos de **soma** do vetor  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{w}$  o vetor representado pelo segmento orientado  $AC$ . Para indicar esse vetor, usamos a notação usual de soma:

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}.$$

Observe que os segmentos orientados  $AB$  e  $BC$ , que representam  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , respectivamente, foram escolhidos de tal modo que a extremidade  $B$  do segmento orientado  $AB$  coincide com a origem  $B$  do segmento orientado  $BC$ .

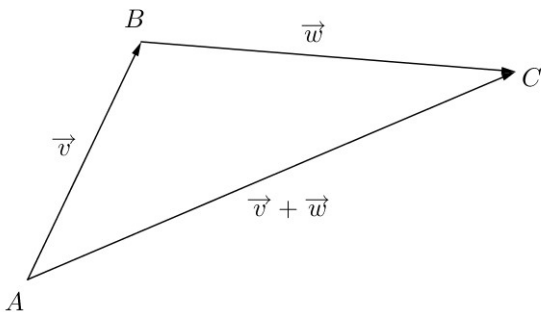


Figura 1: dois vetores e sua soma.

A seguir, mostraremos que a correspondência que associa o vetor  $\vec{v} + \vec{w}$  aos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  é uma *operação binária* definida sobre o conjunto dos vetores no plano ou

no espaço; tal operação será denominada **adição de vetores**.

Para tanto, primeiro temos que mostrar que a soma de dois vetores só depende dos vetores em si, e não dos representantes de cada vetor. Isso significa que, se escolhermos outro representante  $A'B'$  do vetor  $\vec{v}$  e outro representante  $B'C'$  do vetor  $\vec{w}$ , então o segmento orientado  $A'C'$  também deve representar o vetor  $\vec{v} + \vec{w}$ .

Como  $AB$  e  $A'B'$  são equipolentes (denotamos  $AB \equiv A'B'$  – veja a aula *Conceito de Vetor*) o quadrilátero  $AA'B'B$  é um paralelogramo (cf. Figura 2). Da mesma forma, como  $BC \equiv B'C'$ , o quadrilátero  $BB'C'C$  também é um paralelogramo.

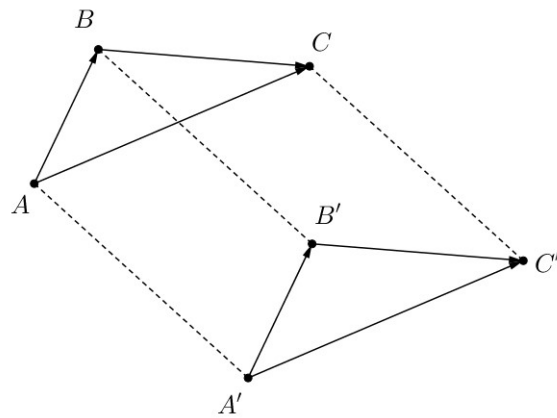


Figura 2: a soma de dois vetores não depende da escolha dos representantes.

Consequentemente,  $AA'$  tem a mesma medida e é paralelo a  $BB'$ , que tem a mesma medida e é paralelo a  $CC'$ . Portanto,  $AA'$  tem a mesma medida e é paralelo a  $CC'$ , de sorte que  $AA'C'C$  também é um paralelogramo, e isso mostra que os segmentos orientados  $AC$  e  $A'C'$  têm a mesma medida e a mesma direção. Agora, recorde que os sentidos de  $AC$  e  $A'C'$  são determinados pelos sentidos dos segmentos orientados  $AB$  e  $BC$ , e  $A'B'$  e  $B'C'$ , respectivamente. Como  $AB$  e  $A'B'$  têm o mesmo sentido, assim como  $BC$  e  $B'C'$ , concluímos que  $AC$  e  $A'C'$  também têm o mesmo sentido.

Portanto,  $A'C' \equiv AC$ , e concluímos que a soma de vetores não depende da escolha particular dos representantes desses vetores. Por causa disso, costumamos dizer que a soma de dois vetores está *bem definida*, ou, ainda, que a adição de vetores é uma *operação bem definida*.

Continuando nosso estudo, verificaremos agora que a operação adição de vetores tem propriedades análogas àquelas da operação de adição de números reais. Mais precisamente, mostraremos que a adição de vetores é *associativa*, *comutativa*, tem *elemento neutro* e cada vetor

tem um *inverso*, ou *simétrico*.

(1) **Associatividade:** se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores, então

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

A figura 3 esclarece a situação:

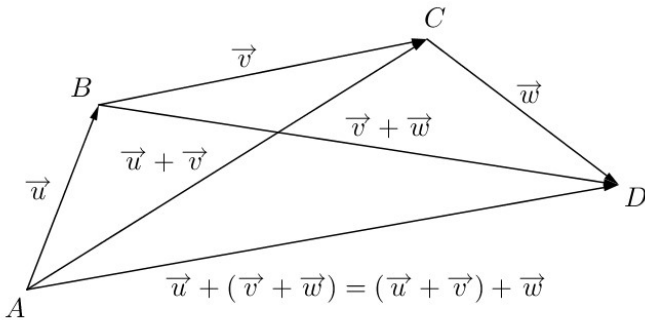


Figura 3: a adição de vetores é associativa.

se  $\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{BC} = \vec{v}$  e  $\vec{CD} = \vec{w}$ , então

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD}$$

e, daí,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}.$$

Por outro lado,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

e

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}.$$

Portanto,

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{AD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

(2) **Comutatividade:** se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores, então

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

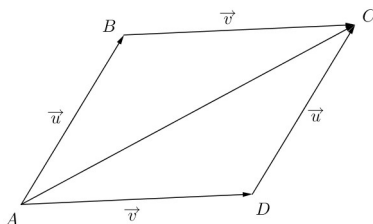


Figura 4: a adição de vetores é comutativa.

Nas notações da figura 4, temos  $AB \equiv DC$  e  $AD \equiv BC$ , logo

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \\ &= \vec{AD} + \vec{DC} \\ &= \vec{v} + \vec{u}. \end{aligned}$$

(3) **Existência de elemento neutro:** comecemos recordando que um segmento orientado  $AB$ , com  $A = B$ , é chamado segmento **degenerado**, e que o vetor representado por segmentos degenerados é chamado **vetor nulo** e denotado por  $\vec{0}$ . Assim, um segmento degenerado tem comprimento zero, mas não tem direção nem sentido definidos.

Se um vetor  $\vec{v}$  é representado pelo segmento orientado  $CA$ , e  $AB$  é um segmento orientado degenerado, então

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB} = \vec{CA},$$

pois  $A = B$ . Logo,  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ , e a comutatividade da adição de vetores assegura que o vetor nulo age como elemento neutro da adição de vetores, isto é, que

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v},$$

para todo vetor  $\vec{v}$ .

(4) **Existência do simétrico de um vetor:** seja  $AB$  um segmento orientado que representa o vetor  $\vec{v}$ , isto é,  $\vec{v} = \vec{AB}$ . O segmento orientado  $BA$ , que tem o mesmo comprimento, a mesma direção e sentido contrário, representa um vetor  $\vec{w}$  tal que

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

e (pela comutatividade da adição de vetores)  $\vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$ .

Por outro lado, se  $\vec{u}$  for outro vetor tal que  $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ , então

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{0} + \vec{w} = \vec{w}. \end{aligned}$$

(Observe que, nas igualdades acima, utilizamos a associatividade da adição de vetores, juntamente com o fato de  $\vec{0}$  ser elemento neutro em relação a essa operação.)

Resumindo a discussão acima, mostramos que para cada vetor  $\vec{v}$ , existe um único vetor  $\vec{w}$  que, somado a  $\vec{v}$ , é igual a  $\vec{0}$ . Esse vetor é denotado por  $-\vec{v}$  e é chamado de **simétrico** de  $\vec{v}$ . Temos, então

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0},$$

para cada vetor  $\vec{v}$ .

Prosseguimos no estudo da adição de vetores mostrando como expressar a soma de dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  no plano em função das coordenadas dos mesmos.

Começamos fixando um sistema cartesiano de coordenadas, de origem  $O$ , e escolhendo como representante do vetor  $\vec{v}$  um segmento orientado  $OA$  de origem  $O$  (veja a figura 5). Como representante do vetor  $\vec{w}$ , escolhemos um segmento orientado  $AB$ .

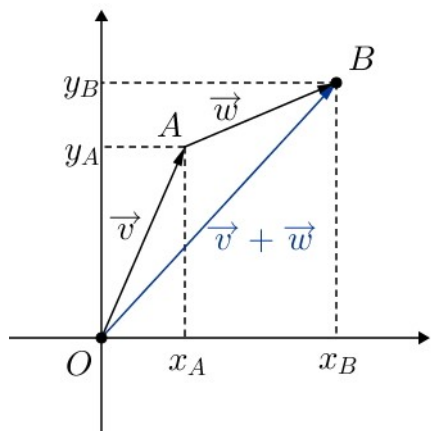


Figura 5: coordenadas da soma de dois vetores.

Como já vimos na aula *Conceito de Vetor*, se  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$  são as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, então as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ . Como as coordenadas de  $O$  são  $(0, 0)$ , temos que  $\overrightarrow{OA} = (x_A - 0, y_A - 0) = (x_A, y_A)$  e  $\overrightarrow{OB} = (x_B - 0, y_B - 0) = (x_B, y_B)$ . Dessa forma,

$$\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OB} = (x_B, y_B) = (x_A, y_A) + (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

A discussão acima nos permite afirmar que, se  $\vec{v} = (x_v, y_v)$  e  $\vec{w} = (x_w, y_w)$ , então as coordenadas da soma  $\vec{v} + \vec{w}$  são as somas das coordenadas de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ :

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_v + x_w, y_v + y_w).$$

Para vetores no espaço, a situação é similar: se  $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$  e  $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$ , então

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_v + x_w, y_v + y_w, z_v + z_w).$$

## 2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Considere um vetor  $\vec{v}$  e um número real  $\alpha$ . Seja  $AB$  um segmento orientado que representa  $\vec{v}$ , e seja  $C$  o ponto pertencente à reta  $r$  determinada por  $A$  e  $B$  e que satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ . (Em particular, se  $\alpha = 0$ , então  $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ , logo  $A = C$ .)

- (2) Se  $\alpha > 0$ , então  $B$  e  $C$  pertencem à mesma semirreta de  $r$ , das determinadas por  $A$  sobre  $r$  (veja a figura 6).
- (3) Se  $\alpha < 0$ , então  $B$  e  $C$  pertencem a semirretas opostas, das determinadas por  $A$  sobre  $r$  (veja novamente a figura 6).

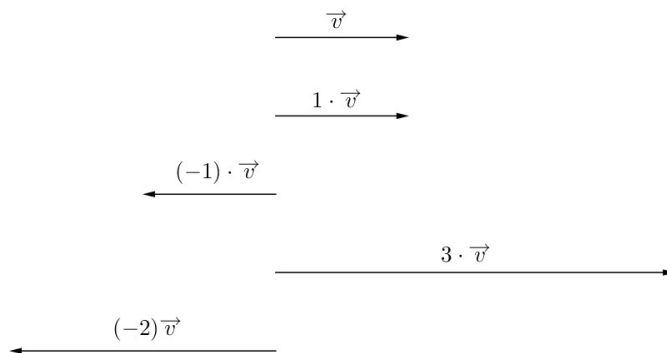


Figura 6: multiplicação de um vetor por alguns números.

O vetor  $\overrightarrow{AC}$ , representado pelo segmento orientado  $AC$  obtido como descrito acima, é chamado de **produto de  $\vec{v}$  pelo escalar  $\alpha$** . Usamos a notação  $\alpha \vec{v}$  para indicar o vetor  $\overrightarrow{AC}$ .

**Observação 1.** No contexto de multiplicação de um vetor por um número, é costume de nos referirmos ao número real  $\alpha$  como um escalar (e não simplesmente como um número). Isso tem raízes históricas, relacionadas ao fato de que os físicos se referem às grandezas não-vetoriais como escalares.

De acordo com a definição acima, a multiplicação de um vetor  $\vec{v}$  por um escalar positivo  $\alpha$  mantém sua direção, seu sentido e altera seu comprimento, multiplicando-o por  $\alpha$ . Por outro lado, a multiplicação desse mesmo vetor por um escalar negativo  $\beta$  mantém sua direção, inverte seu sentido e altera seu comprimento, multiplicando-o por  $|\beta|$ . Também, a multiplicação do vetor  $\vec{v}$  por 0 produz o vetor nulo  $\vec{0}$ .

Assim como ocorreu com a adição de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar não depende da escolha particular de um segmento orientado que represente o vetor. Isso pode ser facilmente verificado, notando-se que a definição de multiplicação por escalar estabelece que a direção do vetor fica mantida, enquanto o sentido e o comprimento do vetor resultante são controlados pelo escalar.

Mais precisamente, se  $AB$  e  $A'B'$  são representantes de um mesmo vetor  $\vec{v}$  e  $\alpha \neq 0$  é um número real (o caso em que  $\alpha = 0$  é imediato), então  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$  e  $\alpha \cdot \overrightarrow{A'B'}$  têm

a mesma direção que  $AB \equiv A'B'$ , por definição. Por outro lado, os comprimentos de  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$  e de  $\alpha \cdot \overrightarrow{A'B'}$  são  $\alpha \cdot \overline{AB} = \alpha \cdot \overline{A'B'}$  (note que  $AB \equiv A'B'$  implica  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ). Finalmente, o sentido desses dois vetores coincide com o de  $\overrightarrow{AB}$  se  $\alpha > 0$  e é o contrário do de  $\overrightarrow{AB}$  se  $\alpha < 0$ . Portanto,  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{A'B'}$ .

Se as coordenadas de um vetor no plano são dadas por  $\vec{v} = (x_v, y_v)$  e se  $\alpha$  é um escalar, então as coordenadas do vetor  $\alpha \vec{v}$  são dadas por

$$\alpha \vec{v} = (\alpha x_v, \alpha y_v).$$

Realmente, como já vimos acima, se  $\alpha = 0$ , então  $\alpha \vec{v} = \vec{0}$  é o vetor nulo; em coordenadas,  $\alpha \vec{v} = (0, 0) = (0 \cdot x_v, 0 \cdot y_v) = (\alpha x_v, \alpha y_v)$ .

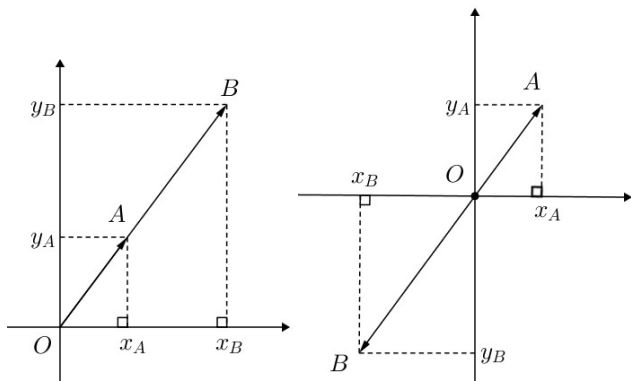


Figura 7: multiplicação de um vetor por escalar em coordenadas.

Vamos mostrar a seguir que a mesma igualdade continua válida se  $\alpha \neq 0$ . De fato, se  $O = (0, 0)$  é a origem do sistema de coordenadas e  $OA$  é um segmento orientado que representa o vetor  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ , então as coordenadas do ponto  $A$  coincidem com as coordenadas do vetor  $\vec{v}$ :

$$(x_v, y_v) = \vec{v} = \overrightarrow{OA} = (x_A - 0, y_A - 0) = (x_A, y_A).$$

Se  $B = (x_B, y_B)$  é um ponto do plano tal que  $\overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$ , então  $\overline{OB} = |\alpha| \cdot \overline{OA}$ . Como os segmentos orientados  $OA$  e  $OB$  têm a mesma direção, ocorre uma das duas situações, ilustradas na figura 7. Em ambos os casos, os triângulos  $OAx_A$  e  $OBx_B$  são semelhantes, com razão de semelhança igual a  $|\alpha|$ . Dessa semelhança, segue que

$$\frac{|x_B|}{|x_A|} = \frac{|y_B|}{|y_A|} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = |\alpha|.$$

No caso em que  $\alpha > 0$ , as coordenadas de  $(x_B, y_B)$  têm o mesmo sinal que as coordenadas de  $(x_A, y_A)$ , pelo item (2) da definição de multiplicação por escalar. No caso em que

$\alpha < 0$ , essas coordenadas têm sinais opostos, pelo item (3) da mesma definição. Portanto,  $(x_B, y_B) = (\alpha x_A, \alpha y_A)$ . Finalmente, como  $\overrightarrow{OB} = \alpha \vec{v}$ , temos que  $\alpha \vec{v} = (\alpha x_v, \alpha y_v)$ .

Se  $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$  for um vetor no espaço, então, de modo análogo ao que fizemos acima, podemos concluir que

$$\alpha \vec{v} = (\alpha x_v, \alpha y_v, \alpha z_v),$$

para qualquer escalar  $\alpha$ .

As propriedades da multiplicação por escalar são as seguintes:

- (1)  $(\alpha\beta) \vec{v} = \alpha(\beta \vec{v}) = \beta(\alpha \vec{v})$ .
- (2)  $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$ .
- (3)  $(\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$ .
- (4)  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ .

A verificação dessas propriedades pode ser feita diretamente pela definição, ou usando-se um sistema de coordenadas cartesianas, como descrito acima. Por exemplo, se  $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ , então

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \vec{v} &= ((\alpha\beta)x_v, (\alpha\beta)y_v, (\alpha\beta)z_v) \\ &= \alpha(\beta x_v, \beta y_v, \beta z_v) = \alpha(\beta \vec{v}). \end{aligned}$$

Se  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  são vetores e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  não números reais, a expressão

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

é chamada uma **combinação linear** dos vetores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

A importância do conceito de combinação linear reside no fato de que se dois vetores no plano são tais que nenhum deles é um múltiplo escalar do outro, então todo vetor no plano pode ser escrito como combinação linear desses dois vetores. Da mesma forma, se três vetores no espaço são tais que nenhum deles é combinação linear dos outros dois, então todo vetor no espaço pode ser escrito como combinação linear desses três vetores. Por essa razão, dizemos que o plano tem *dimensão 2* e o espaço tem *dimensão 3*.

O exemplo a seguir verifica um caso particular da discussão do parágrafo anterior.

**Exemplo 2.** Considere os vetores  $\vec{u} = (1, 2)$  e  $\vec{v} = (2, 1)$ . Se  $\vec{w} = (a, b)$  é um vetor qualquer no plano, mostre que  $\vec{w}$  é uma combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Prova.** Precisamos encontrar números reais  $x$  e  $y$  tais que

$$x \vec{u} + y \vec{v} = \vec{w},$$

ou seja,  $x(1, 2) + y(2, 1) = (a, b)$ . Tal igualdade equivale a termos  $(x + 2y, 2x + y) = (a, b)$ , de sorte que temos de garantir que o sistema linear (em  $x$  e  $y$ )

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$$

possui solução.

A matriz dos coeficientes do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

que tem determinante  $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$ . Como sabemos, o fato desse determinante ser não nulo é equivalente ao de que o sistema pode ser resolvido. Realmente, não é difícil obter (faça esse cálculo)

$$x = \frac{2a - b}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{2b - a}{3}$$

como a única solução do sistema.  $\square$

## Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

O assunto desenvolvido nesta aula faz parte de um tema desenvolvido mais amplamente no Ensino Superior e chamado *Álgebra Linear*. Tanto o conceito de vetor, desenvolvido na aula anterior, como também as duas operações estudadas nesta aula foram aqui apresentados geometricamente. Uma abordagem abstrata do assunto, que geralmente é encontrada nos livros de *Álgebra Linear*, é a que toma o conceito de vetor como *noção primitiva*, isto é, uma noção que *prescinde de definição*, e as propriedades que apresentamos aqui como *axiomas* que são afirmações que prescindem de demonstração.

No Ensino Médio, o assunto “vetores” é comumente associado à Mecânica, e por isso os alunos costumam pensar que se trata de algo a ser estudado exclusivamente nas aulas de Física. Oportunamente, teceremos alguns comentários sobre as relações entre vetores e Mecânica. Entretanto, conforme veremos já nos próximos materiais, o pouco que estudaremos sobre vetores também nos permitirá resolver vários problemas interessantes de Geometria.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.

3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.