

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 1

Composição de Funções - Parte 1

Tópicos Adicionais

**Autores: Profs. Angelo Papa Neto
Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha**

22 de Outubro de 2026



A noção de *composição* de funções surge naturalmente quando temos *funções* f e g tais que a *imagem* de f está *contida* no *domínio* de g . Nesse caso, podemos *encadear* as regras de f e g para gerar uma nova regra,

$$x \mapsto g(f(x)). \quad (1)$$

A correspondência (1) determina uma função chamada *composta* de f e g , denotada por $g \circ f$. Assim, por definição,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (2)$$

para todo x no domínio de f .

Por exemplo, se f e g são as funções polinomiais dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3 - x + 1$, a regra da composta $g \circ f$ é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = f(x)^3 - f(x) + 1 \\ &= (x^2)^3 - x^2 + 1 \\ &= x^6 - x^2 + 1.\end{aligned}$$

1 Composição de funções

Agora, convém formular em termos mais precisos a definição de composição, apresentada acima.

Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: C \rightarrow D$ funções tais que $\text{Im } f \subset C$. Isso permite considerar a função $g \circ f$, de domínio A e contradomínio D , cuja ação sobre os elementos de A consiste na ação da função f seguida pela ação da função g . Mais explicitamente, $g \circ f: A \rightarrow D$ é dada por (2).

Perceba que a regra de $g \circ f$ está bem definida: para cada $a \in A$, temos $f(a) \in \text{Im } f \subset C$; sendo $f(a)$ um ponto do domínio de g , é lícito considerar sua imagem $g(f(a)) \in D$. (Veja a figura 1.)

Como já antecipamos, a função $g \circ f$ chama-se **composta** de f e g , nessa ordem.

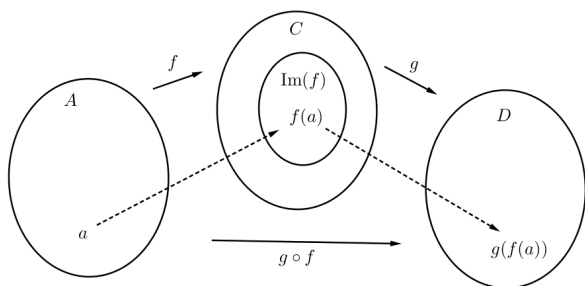


Figura 1: a ação da função composta $g \circ f$ sobre um elemento $a \in A$.

Observação 1. Muitos autores (senão a maioria) definem a composta de f e g exigindo que o contradomínio de f seja igual ao domínio de g , isto é, $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow D$. Adotar esta definição ou a dada acima não gera diferenças essenciais. Realmente, se $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ forem tais que $\text{Im } f \subset C$, então, denotando $\text{Im } f$ por X , podemos ver f como uma função $\tilde{f} : A \rightarrow X$ (tal que $\tilde{f}(a) = f(a)$, para todo $a \in A$) e restringir g a X , obtendo $g|_X : X \rightarrow D$; entretanto, note que, para todo $a \in A$, temos

$$(g|_X \circ \tilde{f})(a) = g|_X(\tilde{f}(a)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Assim, tanto $g|_X \circ \tilde{f}$ quanto $g \circ f$ fazem corresponder, para cada elemento de A , um mesmo elemento de D .

Observação 2. Seguindo à risca a definição de composta que apresentamos, pode ocorrer de $g \circ f$ não estar definida apenas porque não consideramos o domínio maximal de g . Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = \cos x$, vale $\text{Im } f = \mathbb{R} \not\subset [0, 1]$, o que impede, artificialmente, a composição de f e g . Por outro lado, considerando o domínio maximal $\mathbb{R}$ de g , a composta $g \circ f$ fica definida como uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cuja regra é $(g \circ f)(x) = \cos(2x)$.

Portanto, sempre que convier, tomaremos o domínio maximal de g ao considerar a composição de f e g .

Exemplo 3. Considere as funções $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Observando que

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \geq 0\} = [-1, +\infty)$$

(e que $[0, +\infty)$ é o domínio maximal de g), a relação $\text{Im } f \not\subset [0, +\infty)$ impede que se defina a composta de f e g .¹

Por outro lado, faz sentido tomar a função composta $f \circ g$, a composta de g e f , porque a imagem de g é o intervalo $\text{Im } g = [0, +\infty)$, o qual está contida no domínio de f (em verdade, nesse caso, esses conjuntos são iguais). A composta $f \circ g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1. \quad \square$$

O exemplo 3 mostra que, em geral, a ordem em que as funções são consideradas na composição é importante, pois uma das compostas pode existir mas a outra não. Mais ainda, mesmo que ambas as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ existam, elas não necessariamente serão iguais, como veremos no exemplo 4 a seguir. Em outras palavras, podemos dizer que a composição de funções **não é comutativa**.

Exemplo 4. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. A imagem de f é todo o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem de g é o conjunto dos números reais não negativos. Assim, a imagem de cada função está contida no domínio da outra e as duas compostas, $f \circ g$ e $g \circ f$, podem ser consideradas. Entretanto, temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

e

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.\end{aligned}$$

¹De outra forma, os números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 0)$ não podem pertencer ao domínio de $g \circ f$, pois, por exemplo, se 0 estivesse nesse domínio, deveríamos ter

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1),$$

mas g não está definida em -1 (pois $\sqrt{-1}$ não é um número real).

Logo, $f \circ g \neq g \circ f$. □

Podemos calcular também a composta de três ou mais funções, desde que as condições para a existência das compostas parciais sejam satisfeitas. Mais precisamente, dadas três funções $f : A_1 \rightarrow A_2$, $g : A_3 \rightarrow A_4$ e $h : A_5 \rightarrow A_6$, com $\text{Im } f \subset A_3$ e $\text{Im } g \subset A_5$, podemos considerar as compostas $h \circ g$ e $g \circ f$. Além disso, como

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g \subset A_5,$$

também podemos considerar a composta $h \circ (g \circ f)$.

Assim, a composta das três funções pode, a princípio, ser obtida de duas maneiras: $(h \circ g) \circ f$ ou $h \circ (g \circ f)$. Mas, se $x \in A_1$, então

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

e

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Dessa forma, as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ são iguais, o que demonstra que a composição de funções é **associativa**.

Exemplo 5. Para cada $n \geq 1$ inteiro, seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f_n(x) = x^{1/n}$. Gostaríamos de calcular $f_2 \circ f_3 \circ f_4$. Para tanto, começamos observando que

$$x \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, 1],$$

de sorte que $\text{Im } f_n \subset [0, 1]$, para todo $n \geq 1$ (em verdade, $\text{Im } f_n = [0, 1]$, mas a inclusão nos bastará). Então, realmente podemos considerar a composta $f_2 \circ f_3 \circ f_4$, e temos

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x) &= f_2(f_3(f_4(x))) = f_2(f_3(x^{1/4})) \\ &= f_2((x^{1/4})^{1/3}) = f_2(x^{1/12}) \\ &= (x^{1/12})^{1/2} = x^{1/24}. \quad \square\end{aligned}$$

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função tal que $\text{Im } f \subset A$. Então, dado um natural $n \geq 2$, podemos compor f consigo mesma

n vezes, obtendo a função composta $f \circ \dots \circ f$ (com n cópias de f), que denotamos por $f^{(n)}$. Nesse caso, dizemos que $f^{(n)}$ é a **n -ésima iterada** de f . Por *uniformidade de notação*, costumamos denotar f por $f^{(1)}$.²

Exemplo 6. Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Como $x > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0$, podemos calcular a n -ésima função iterada $f^{(n)}$. Então,

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= f(f(x)) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}, \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = 1 + \frac{1}{f^{(2)}(x)} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

Continuando (verifique!), obtemos $f^{(4)}(x) = \frac{5x+3}{3x+2}$, $f^{(5)}(x) = \frac{8x+5}{5x+3}$ e, em geral,

$$f^{(n)}(x) = \frac{F_{n+1}x + F_n}{F_nx + F_{n-1}},$$

onde F_n é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci: $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$, dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, para cada $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. $\square$

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a função que aplica cada par ordenado (x, y) no par ordenado $(-y, x)$, ou seja, tal que

$$f(x, y) = (-y, x),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Calcule $f^{(2026)}(x, y)$.

Solução. Cada aplicação de f age sobre o par ordenado (x, y) de duas formas: há uma troca de posição entre as coordenadas e uma troca de sinal da primeira coordenada. Vamos, então, calcular as iteradas de ordem 2, 3 e 4 de f :

$$f^{(2)}(x, y) = f(f(x, y)) = f(-y, x) = (-x, -y).$$

²E a função identidade de A por $f^{(0)}$.

$$f^{(3)}(x, y) = f(f^{(2)}(x, y)) = f(-x, -y) = (y, -x).$$

$$f^{(4)}(x, y) = f(f^{(3)}(x, y)) = f(y, -x) = (x, y).$$

Os cálculos acima mostraram que, a cada quatro aplicações de f sobre um par ordenado (x, y) , voltamos ao mesmo par inicial (x, y) . Assim, $f^{(4)}(x, y) = (x, y)$, $f^{(8)}(x, y) = (x, y)$, $f^{(12)}(x, y) = (x, y)$, etc. Em geral, $f^{(n)}(x, y) = (x, y)$ sempre que n for um múltiplo de 4.

O maior múltiplo de 4 menor que 2026 é 2024. Logo, $f^{(2024)}(x, y) = (x, y)$ e

$$f^{(2026)}(x, y) = f^{(2)}(f^{(2024)}(x, y)) = f^{(2)}(x, y) = (-x, -y).$$

□

Seja A um conjunto não vazio. A função $\text{Id}_A : A \rightarrow A$, dada por $\text{Id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$, é chamada **função identidade de A** . Essa função tem a seguinte propriedade em relação à composição: se $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow A$ são funções quaisquer, então $f \circ \text{Id}_A = f$ e $\text{Id}_A \circ g = g$. De fato, para todos $a \in A$, $c \in C$, temos

$$(f \circ \text{Id}_A)(a) = f(\text{Id}_A(a)) = f(a)$$

e

$$(\text{Id}_A \circ g)(c) = \text{Id}_A(g(c)) = g(c).$$

Para simplificar a notação, escreveremos Id ao invés de $\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exemplo 8. Uma função $f : A \rightarrow A$ é chamada **involução** se $f \circ f = \text{Id}_A$. Não é difícil verificar que as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x$, e $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, dada por $g(x) = 1/x$, são involuções. Esse também é o caso da função reflexão $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $r(x, y) = (y, x)$. □

Dada uma função $f : A \rightarrow A$, cujos domínio e contra-domínio são iguais a A , dizemos que $a \in A$ é um **ponto fixo** de f se $f(a) = a$. Se existir um número natural n tal que $f^{(n)}(a) = a$ e $f^{(k)}(a) \neq a$ para $1 \leq k < n$, diremos que a

é um **ponto periódico** de **período** n de f . Dessa forma, pontos fixos são pontos periódicos de período 1.

No exemplo 6, a igualdade $f(x) = x$ implica que $x = 1 + \frac{1}{x}$, ou seja, $x^2 - x - 1 = 0$. Como x deve ser positivo, temos que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o único ponto fixo de f .

No exemplo 7, a origem $(0, 0)$ é o único ponto fixo de f e todos os outros pontos são periódicos de período 4.

No exemplo 8, os pontos fixos da função r são os que satisfazem a igualdade $(y, x) = r(x, y) = (x, y)$, ou seja, são os pontos da reta $y = x$. Os demais pontos são periódicos de período 2.

2 Exemplos

Nesta seção, discutimos mais alguns exemplos relacionados ao conceito de composição de funções.

Exemplo 9. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que*

$$f \circ g = \text{Id} \quad \text{e} \quad f \circ f = g \circ g.$$

Prove que $g \circ f = \text{Id}$.

Solução. Utilizando a associatividade da composição e as relações dadas na hipótese, obtemos

$$\begin{aligned} g \circ f &= \text{Id} \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ (g \circ f) \\ &= f \circ [g \circ (g \circ f)] = f \circ [(g \circ g) \circ f] \\ &= f \circ [(f \circ f) \circ f] = f \circ [f \circ (f \circ f)] \\ &= f \circ [f \circ (g \circ g)] = f \circ [(f \circ g) \circ g] \\ &= f \circ (\text{Id} \circ g) = f \circ g = \text{Id}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 10. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que comuta com todas as funções afins crescentes. Mostre que $f = \text{Id}$.*

Solução. Por hipótese, temos

$$f(ax + b) = af(x) + b \tag{3}$$

para quaisquer números reais a, b, x , com $a > 0$. Fazendo $b = x = 0$ e $a = 2$ na igualdade acima, vem que $f(0) = 2f(0)$, de modo que $f(0) = 0$. Assim, tomando $x = 0$ em (3), obtemos $f(b) = b$ para todo b real, ou seja, $f = \text{Id}$. $\square$

Exemplo 11. *Sejam f e g funções reais de uma variável real, tais que a composta $g \circ f$ está definida. Se f e g forem (estritamente) monótonas, prove que $g \circ f$ também é (estritamente) monótona.*

Mais especificamente, mostre que $g \circ f$ é monótona não decrescente se f e g têm o mesmo tipo de monotonicidade, e monótona não crescente se f e g têm tipos diferentes de monotonicidade.

Solução. Suponhamos que f e g sejam monótonas não decrescentes (resp. monótonas não crescentes). Dados x, y no domínio de f , temos

$$\begin{aligned}x \leq y &\Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ (resp. } f(x) \geq f(y)) \\&\Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y)),\end{aligned}$$

mostrando que $g \circ f$ é monótona não decrescente. Os outros dois casos são igualmente simples. $\square$

Exemplo 12. *Mostre que não existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e tal que $f \circ f = -\text{Id}$.*

Solução. Basta perceber que, de acordo com o exemplo anterior, o fato de f ser monótona implica que $f \circ f$ é monótona não decrescente. Como a função $-\text{Id}$ é decrescente, a igualdade proposta no enunciado é impossível. $\square$

Para o próximo exemplo, recordemos a noção de **isometria do plano**: fixado um plano Π , uma aplicação $I : \Pi \rightarrow \Pi$ é dita uma isometria se I preserva distâncias, ou seja, $\overline{I(P)I(Q)} = \overline{PQ}$ para quaisquer pontos $P, Q \in \Pi$.

Sugerimos, ainda, a leitura da 2ª seção da aula *Transformações Lineares no $\mathbb{R}^2$ - Parte II*, no módulo *Geometria das Transformações Lineares*. Lá, o leitor encontrará o seguinte resultado de classificação das isometrias do plano

(Teorema 14): se I for uma isometria do plano, então I será uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento (i.e., a composta de uma reflexão com uma translação por um vetor paralelo à reta de reflexão).

De acordo com os resultados do capítulo 6 da referência [4], toda translação e toda rotação do plano se exprimem como a composta de duas reflexões. Esse fato, aliado ao teorema do parágrafo anterior, implica o

Exemplo 13. *Qualquer isometria do plano é a composta de no máximo três reflexões.* $\square$

Exemplo 14 (OBM - 2008). *Determine a quantidade de funções $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tais que $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Solução. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \rightarrow X$ uma função satisfazendo a condição do enunciado e I sua imagem. A condição $f(f(x)) = f(x)$, $x \in X$, significa que f , restrita a I , é a função identidade desse conjunto.

Inversamente, escolhido um subconjunto não vazio $I \subset X$, obtemos uma função $f : X \rightarrow X$ satisfazendo as condições do enunciado requerendo que $f(x) = x$ para todo $x \in I$ e $f(x) \in I$ para todo $x \in X \setminus I$.

Em suma, as funções f tais que $f \circ f = f$ ficam completamente determinadas por I e pela restrição $f|_{X \setminus I} : X \setminus I \rightarrow I$. Desse modo, contar a quantidade de funções que o problema pede é o mesmo que contar o número de pares $(I, f|_{X \setminus I})$.

Se a imagem I de f possuir n elementos, em que $1 \leq n \leq 5$, então $X \setminus I$ tem $5 - n$ elementos; portanto, a restrição $f|_{X \setminus I} : X \setminus I \rightarrow I$ pode ser escolhida de n^{5-n} formas. Como há $\binom{5}{n}$ subconjuntos de X com n elementos, os princípios multiplicativo e aditivo combinatórios garantem que a quantidade requerida de funções f nas condições do enunciado é

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 \binom{5}{n} n^{5-n} &= 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^1 + 1 \cdot 5^0 \\ &= 5 + 80 + 90 + 20 + 1 = 196. \end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Os exemplos 6 e 7 são importantes porque tratam da iteração de uma função, que é a composição de uma função com ela mesma um número finito de vezes.

O exemplo 12 admite a seguinte generalização: *se $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$ forem números reais tais que a equação polinomial*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

não admita raízes reais, então a equação funcional

$$a_0f^{(0)} + a_1f^{(1)} + \dots + a_nf^{(n)} = 0$$

*não admite soluções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótonas.*³

A discussão ao final da seção 1, sobre pontos fixos, pode ser explorada mais a fundo com os recursos do Cálculo. Por exemplo, se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ for uma função *contínua*, então existe um ponto fixo de f no intervalo $[a, b]$. Esse resultado pode ser demonstrado utilizando-se o Teorema do Valor Intermediário⁴

Um resultado bem mais profundo sobre pontos periódicos de funções contínuas é conhecido como *Teorema de Sarkovsky*. Pode-se concluir a partir desse teorema que, se uma função f , dada como no parágrafo anterior, tem um ponto periódico de período 3, então ela tem pontos periódicos com todos os períodos possíveis. Outra consequência do Teorema de Sarkovsky é que se a função f possuir apenas um número finito de pontos periódicos, então todos eles terão períodos que são potências de 2.

Você pode comentar esses fatos com seus alunos, à guisa de motivação, principalmente se eles estiverem sendo preparados

³O resultado ainda vale se trocarmos “monótonas” por “contínuas”; consulte o artigo [5].

⁴Confira [2]. Há também uma versão substituindo-se a hipótese “contínua” por “monótona não decrescente”. Veja o exemplo 14 da aula *A Completude da Reta - Parte I*, no módulo *Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 2*.

para um curso de Cálculo. Entretanto, a demonstração do Teorema de Sarkovsky está além dos objetivos de um curso introdutório de Cálculo. Uma prova pode ser encontrada na sugestão de leitura complementar [3].

A sugestão de leitura complementar [1] aborda certas funções específicas, como as funções afins, quadráticas e exponenciais. Já a sugestão de leitura complementar [2] tem uma abordagem mais próxima da que adotamos aqui, exibindo propriedades gerais da composição de funções, inclusive algumas que não expusemos aqui.

O material dessa aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. 11^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. *Introdução à Análise*. 3^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
3. W. de Melo. *Lectures on the One-dimensional Dynamics*. 17^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.
4. E. L. Lima. *Isometrias*. 2^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
5. D. Yang, W. Zhang. Characteristic solutions of polynomial-like iterative equations. *Aequationes Mathematicae* 67 (2004), 80–105, Theorem 5.