Material Teórico - Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Inequações-Produto

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de junho de 2018

1 Introdução

Antes de definir o que são inequações produto, no primeiro exemplo desta aula vamos resolver uma inequação de segundo grau. Apesar de que na aula anterior aprendemos a resolver apenas inequações de primeiro grau, bastam algumas observações para conseguirmos resolver esse primeiro problema. Na seção 3 faremos um estudo mais geral sobre inequações de segundo grau.

Exemplo 1. *Encontre os valores reais de x que satisfazem a desigualdade $x^2 - 3x > 0$.*

Solução. A ideia é fatorarmos a expressão $x^2 - 3x$, colocando x em evidência. Dessa forma, obtemos

$$x(x-3) > 0.$$

Agora, a observação crucial é que, para o resultado do produto $x(x-3)$ ser positivo, é necessário e suficiente que ambos os fatores sejam positivos ou ambos sejam negativos. Sendo assim, basta analisarmos separadamente estes dois casos:

Caso 1. Ambos os fatores são positivos, $x > 0$ e $x - 3 > 0$: como a segunda inequação claramente equivale a $x > 3$, concluímos que x deve satisfazer simultaneamente as condições $x > 0$ e $x > 3$. Mas, uma vez que todo número maior que 3 já é automaticamente maior do que 0, basta que seja $x > 3$.

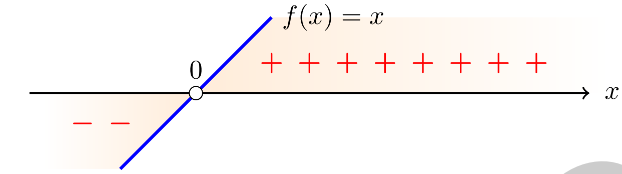
Caso 2. Ambos os fatores são negativos, $x < 0$ e $x - 3 < 0$: a segunda inequação equivale a $x < 3$, de sorte que deve ser $x < 0$ e $x < 3$. Dessa vez, a restrição mais forte é $x < 0$.

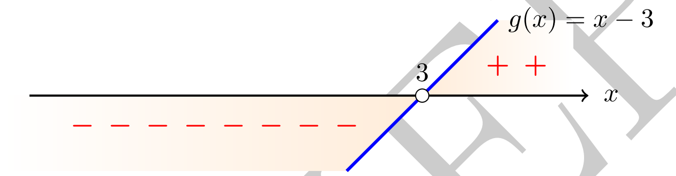
Note que os dois casos dão soluções válidas e que x é uma solução quando satisfaz as restrições do Caso 1 *ou* do Caso 2. Temos, então, que $x < 0$ ou $x > 3$, e o conjunto-solução é a *união* dos intervalos abertos $(-\infty, 0)$ e $(3, \infty)$:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 3\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

□

Solução alternativa. A técnica que usaremos aqui será explorada exaustivamente no restante deste módulo. Como na solução anterior, temos que resolver a inequação $x(x-3) > 0$. Faremos um pouco mais do que isso: vamos descobrir quando $x(x-3)$ é positivo, quando é nulo e quando é negativo. Para isso, consideremos separadamente as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x - 3$ e façamos o estudo do sinal de cada uma delas, conforme aprendemos na aula anterior. Ambas as funções são de primeiro grau e possuem coeficientes de x positivo. Assim, ambas são crescentes. Veja que $f(x)$ é nula quando $x = 0$ e $g(x)$ é nula quando $x = 3$, o que nos dá os gráficos das seguintes retas (onde não desenhamos o eixo-y, pois sua posição é irrelevante para este problema):





Observe que, conjuntamente, os zeros de $f(x)$ e $g(x)$, ou seja, os pontos do eixo-x onde $x = 0$ ou $x = 3$, dividem os eixo-x em três intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, \infty)$ (veja a figura abaixo):

Em cada um desses intervalos, podemos determinar facilmente o sinal de $f(x) \cdot g(x)$. Realmente:

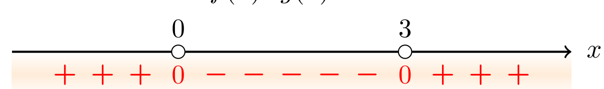
i. Quando $x < 0$, temos que $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$, logo, $f(x) \cdot g(x) > 0$.

ii. Quando $0 < x < 3$, temos que $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$, logo, $f(x) \cdot g(x) > 0$.

iii. Quando $x > 3$, temos $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, logo, $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Veja ainda que, para $x = 0$ e $x = 3$, temos $f(x) \cdot g(x) = 0$. Essas informações são resumidas na figura abaixo:

Sinal de $f(x) \cdot g(x)$ em cada intervalo:



Portanto, a expressão $f(x) \cdot g(x)$, ou seja, $x(x-3)$, é positiva precisamente quando $x < 0$ ou $x > 3$. □

A segunda solução parece ser mais complicada do que a primeira, mas ela tem a vantagem de poder ser generalizada para o produto de uma quantidade maior de funções. Como estamos interessados em saber apenas em quais intervalos cada função é positiva, negativa ou nula, a partir de agora vamos resumir as informações dos gráficos em tabelas chamadas *quadros de sinais*. Estas tabelas são semelhantes às da aula passada, mas incluiremos as informações de várias funções simultaneamente. Por exemplo, as informações dos sinais das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x - 3$ do exemplo anterior podem ser resumidas como segue:

		0		3		x
x	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Na primeira coluna, indicamos quais funções estão sendo estudadas. Na primeira linha, marcamos (em ordem crescente) os pontos do eixo-x que anulam pelo menos uma das funções estudadas. Esses pontos dividem o eixo-x em intervalos, que correspondem às demais colunas da tabela. Em cada linha após a primeira, indicamos se uma das funções de interesse é positiva ou negativa nesses intervalos. Entre uma coluna e outra colocamos o símbolo 0 caso a função que estamos analisando seja anulada naquele ponto. Por fim, aproveitamos também a borda inferior da tabela para demarcar o conjunto-solução do problema em questão.

2 Inequações-produto

Dadas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, chamamos *inequação-produto* a toda inequação de uma das seguintes formas:

$$f(x)\cdot g(x) \geq 0,$$
$$f(x)\cdot g(x) > 0,$$
$$f(x)\cdot g(x) \leq 0,$$
$$f(x)\cdot g(x) < 0,$$
$$f(x)\cdot g(x) \neq 0.$$

Para resolvê-las, basta fazer a análise das variações de sinal de $f(x)$ e de $g(x)$, como na seção anterior, e em seguida organizar os resultados para encontrar quais valores de x fazem com que o produto $f(x)\cdot g(x)$ tenha o sinal desejado. A seguir, implementamos essa estratégia em alguns exemplos.

Exemplo 2. *Encontre todos os valores reais de x que satisfazem $(2x+4)(6x-3) > 0$.*

Solução. Vamos resolver essa inequação de modo semelhante ao que fizemos na solução alternativa do Exemplo 1. Organizaremos diretamente os resultados em quadros de sinais, como descrito no final da seção anterior.

Sejam $f(x) = 2x+4$ e $g(x) = 6x-3$. Primeiramente, devemos analisar o sinal de cada uma dessas funções.

Análise do sinal de $f(x) = 2x+4$: começamos fazendo $f(x) = 0$ para encontrar sua raiz:

$$2x+4 = 0 \implies 2x = -4 \implies x = -2.$$

Como $f(x)$ é uma função de primeiro grau onde o coeficiente de x é positivo, a tabela de variação do sinal de $f(x)$ é a seguinte:

		-2		x
$2x+4$	$-$	0	$+$	

Análise do sinal de $g(x) = 6x-3$: como antes, fazemos $g(x) = 0$ para achar a raiz de g:.

$$6x-3 = 0 \implies 6x = 3 \implies x = 1/2.$$

Também como acima, $g(x)$ é uma função de primeiro grau com coeficiente de x é positivo, de forma que temos o seguinte quadro de sinais:

		$1/2$		x
$6x-3$	$-$	0	$+$	

Elaboração do quadro de sinais: para finalizar, vamos organizar as raízes encontradas, neste caso apenas os números -2 e $1/2$, em ordem crescente sobre uma mesma reta e descrever o sinal das funções $f(x)$, $g(x)$ e $f(x)\cdot g(x)$ em cada um dos intervalos determinados pelas raízes. O resultado é a seguinte tabela de sinais (logo abaixo dela, explicaremos em detalhes como a construímos):

		-2		$1/2$		x
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$	
$6x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(6x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Observe primeiro a linha correspondente à função $f(x) = 2x+4$. A função $f(x)$ é negativa apenas quando $x < -2$; sendo assim, tanto no intervalo entre -2 e $1/2$ como no intervalo de $1/2$ em diante temos que $f(x)$ é positiva. De modo semelhante, na linha da função $g(x) = 6x-3$, temos que a mesma é negativa quando $x < 1/2$, logo, ela também é negativa nos intervalos $(-\infty,-2)$ e $(-2,1/2)$. Os 'zeros' indicam onde cada uma das funções é igual a zero. A última linha, correspondente à função $(2x+4)(6x-3)$, é obtida usando a regra dos sinais para calcular o produto dos sinais em cada coluna: o produto de dois sinais iguais é positivo e o de dois sinais distintos é negativo.

Por fim, abaixo da última linha, marcamos qual(is) parte(s) da reta real pertence(m) ao conjunto-solução. Como a inequação deste exemplo é do tipo ">" (estritamente maior que), vamos marcar os trechos em que temos o sinal "+" na última linha. Além disso devemos tomar o cuidado de indicar se os extremos do intervalo da solução (ou seja, os números -2 e $1/2$) pertencem ou não ao conjunto-solução. Neste exemplo, estes valores zeram uma das funções e, portanto, zeram seu produto (observe os 'zeros' na tabela, que indicam quais funções são zero naquele ponto).

Se a inequação fosse do tipo "$\geq$" ou "$\leq$" os pontos que zeram a função produto fariam parte da solução. Mas, em inequações do tipo "$>$" ou "$<$", estes zeros da função produto não fazem parte solução. No quadro de sinais, distinguimos estes dois casos usando uma bolinha toda preenchida (como $\bullet$) no primeiro caso (quando os valores fazem parte da solução) e uma bolinha oca (como $\circ$) no segundo caso (quando os valores não fazem parte da solução).

Dessa forma, os valores de x que satisfazem a inequação original são os que pertencem ao seguinte conjunto:

$$\begin{aligned} S &= (-\infty, -2) \cup (1/2, \infty) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x > 1/2\}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Resolva a inequação* $(5 - x)(2x - 8) \geq 0$.

Solução. Analisamos separadamente os sinais das funções $f(x) = 5 - x$ e $g(x) = 2x - 8$. Seremos um pouco mais breves no que diz respeito a análise do sinal de cada uma delas, deixando os detalhes a cargo do leitor.

A função $f(x) = 5 - x$ é decrescente (pois o coeficiente de x é negativo) e é anulada quando $x = 5$. Assim, seu quadro de sinais é como abaixo:

		5		x
$5 - x$	$+$	0	$-$	

Por sua vez, $g(x) = 2x - 8$ é crescente e é anulada quando $x = 4$, com o que obtemos o quadro de sinais a seguir:

		4		x
$2x - 8$	$-$	0	$+$	

Agora, agrupando estas informações em um único quadro de sinais, temos:

		4		5		x
$5 - x$	$+$		$+$	0	$-$	
$2x - 8$	$-$	0	$+$		$+$	
$(5 - x)(2x - 8)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\bullet$		$\bullet$		

Os valores de x que satisfazem a inequação original (que é do tipo "'$\geq$") são aqueles que correspondem a intervalos em que o produto é positivo ou zero. Então, neste caso, o conjunto-solução é o intervalo fechado $[4, 5]$. Logo,

$$S = [4, 5] = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 5\}.$$

□

Uma solução diferente para os exemplos anteriores seria expandir o produto $(2x + 4)(6x - 3)$ e fazer diretamente a análise do sinal da função de segundo grau obtida; veremos exemplos disso na Seção 3. Em alguns casos, esse método pode ser mais simples, mas em outros ele é inviável pela quantidade contas ou pelo fato do produto obtido ser uma função de grau maior do que 2, como veremos nos exemplos seguintes. Por isso é importante aprender os dois métodos. É possível, também, que a inequação-produto seja formada por três ou mais fatores.

Exemplo 4. *Encontre todos os valores reais de x tais que*

$$(5x - 15)(6 - x)(3x - 12) > 0.$$

Solução. Neste problema, vamos estudar os sinais de três funções: $f(x) = 5x - 15$, $g(x) = 6 - x$ e $h(x) = 3x - 12$.

Veja que 3 é a única raiz de $f(x)$, 6 é a única raiz de $g(x)$ e 4 é a única raiz de $h(x)$. Dessa vez, vamos construir diretamente o quadro de sinais final. Conjuntamente, temos que marcar os pontos 3, 4 e 6 (nesta ordem) no eixo-x. A função $f(x)$ é negativa para valores menores que 3, a função $g(x)$ é negativa para valores maiores do que 6 e a função $h(x)$ é negativa para valores menores que 4. O resultado é o quadro de sinais abaixo:

		3		4		6		x
$f(x) = 5x - 15$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x) = 6 - x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x) = 3x - 12$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\circ$		$\circ$		$\circ$		

Dessa forma, observando os intervalos onde a função produto é estritamente positiva, temos o conjunto-solução:

$$\begin{aligned} S &= (-\infty, 3) \cup (4, 6) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ ou } 4 < x < 6\}. \end{aligned}$$

□

Alguns problemas que parecem ser complicados podem ser fáceis, se atacados da forma certa.

Exemplo 5. *Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação a seguir:*

$$(3x - 8)^4 (6x - 9)^5 (2x + 7) > 0.$$

Solução. Sejam $f(x) = (3x-8)^4$, $g(x) = (6x-9)^5$ e $h(x) = 2x+7$.

Aqui, a ideia é lembrar que todo número real não nulo, quando elevado a um expoente par, resulta em um número positivo. Sendo assim, a função $f(x)$ ou é igual a zero ou é positiva. É importante lembrar que ela é igual zero exatamente quando $3x-8=0$, ou seja, quando $x = 8/3$. Mas, como a inequação do problema é estrita, o número $8/3$ não poderá fazer de seu conjunto-solução. Assim, não podemos ignorar completamente a função $f(x)$.

Por sua vez, temos $g(x) = (6x-9)^4 \cdot (6x-9)$, de sorte que, por um argumento análogo ao do parágrafo anterior, $(6x-9)^4$ é positivo quando $6x-9 \neq 0$. Assim, o sinal de $g(x)$ é igual ao sinal de $6x-9$, e é fácil analisar o sinal de $g(x)$. Veja, ainda, que $3/2$ é a única raiz real de $g(x)$.

Por fim, a função $h(x)$ possui o número $-7/2$ como única raiz e já sabemos como fazer a análise de seu sinal.

Notando que $-7/2 < 3/2 < 8/3$, resumimos a discussão acima no seguinte quadro de sinais:

		$-7/2$		$3/2$		$8/3$		x
$f(x) = (3x-8)^4$	$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$g(x) = (6x-9)^5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x) = 2x+7$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$	

Então, o conjunto-solução consiste dos reais x tais que $x < -7/2$ ou $3/2 < x < 8/3$ ou $x > 8/3$. □

É possível que as diferentes funções envolvidas em um produto sejam anuladas em um mesmo ponto. Esse é o caso do exemplo a seguir, onde veremos que isso não impede que o método que estamos utilizando seja aplicado.

Exemplo 6. *Encontre todos os valores reais de x tais que $(3x-9)(3-x) < 0$.*

Solução. Seja $f(x) = 3x-9$ e $g(x) = 3-x$. Temos que $f(x)$ é zero apenas quando $x = 3$, o mesmo valendo para $g(x)$. Neste caso, o nosso quadro de sinais tem apenas o ponto $x = 3$ marcado sobre o eixo-x. Como a função $f(x)$ é crescente enquanto que $g(x)$ é decrescente, obtemos:

		3		x
$3x-9$	$-$	0	$+$	
$3-x$	$+$	0	$-$	
$(3x-9)(3-x)$	$-$	0	$-$	

Os valores de x que satisfazem a inequação do enunciado são aqueles em que $x < 3$ ou $x > 3$, ou seja, todos os número reais, exceto o número $x = 3$. Assim, o conjunto-solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}.$$

□

Solução alternativa. É instrutivo observar que, escrevendo $3x-9 = 3(x-3)$ e $3-x = -(x-3)$, obtemos

$$(3x-9)(3-x) = 3(x-3) \cdot [-(x-3)] = -3(x-3)^2.$$

Então, queremos resolver a inequação $-3(x-3)^2 < 0$, que equivale a

$$(x-3)^2 > 0.$$

Como já observamos, a potência de expoente par $(x-3)^2$ é positiva se não for igual a zero, e só se anula quando $x-3=0$, isto é, $x=3$. Então, chegamos novamente ao conjunto-solução $S = \{x \in \mathbb{R};\, x \neq 3\}$. □

3 Estudo da variação de sinal em funções de segundo grau

Uma inequação de segundo grau é uma inequação do tipo $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$, onde

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é uma função de segundo grau. Há duas estratégias gerais para resolver uma inequação de um desses tipos.

A primeira estratégia funciona no caso em que $f(x)$ possui raízes reais, digamos r_1 e r_2. Neste caso, consideramos a *forma fatorada* $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ e resolvemos a inequação original como uma inequação-produto. Isso é essencialmente o que fizemos no Exemplo 1.

Quando $f(x)$ não possui raízes reais, essa estratégia não funciona. De toda forma, sempre é possível fazer a análise de sinal de uma função de segundo grau facilmente, estudando os possíveis tipos de gráficos de $f(x)$. Essa é nossa segunda estratégia.

No caso de funções de segundo grau, a análise de seu sinal depende tanto do sinal do coeficiente de x^2 como do sinal do seu discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Complementado o que havíamos estudado no módulo sobre funções de segundo grau, a Figura 1 realça como se comporta o sinal da função de segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ em todos os possíveis casos. Como de costume, devemos tomar cuidado também com os pontos em que essa função é zero.

Exemplo 7. *Faça a análise da variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$.*

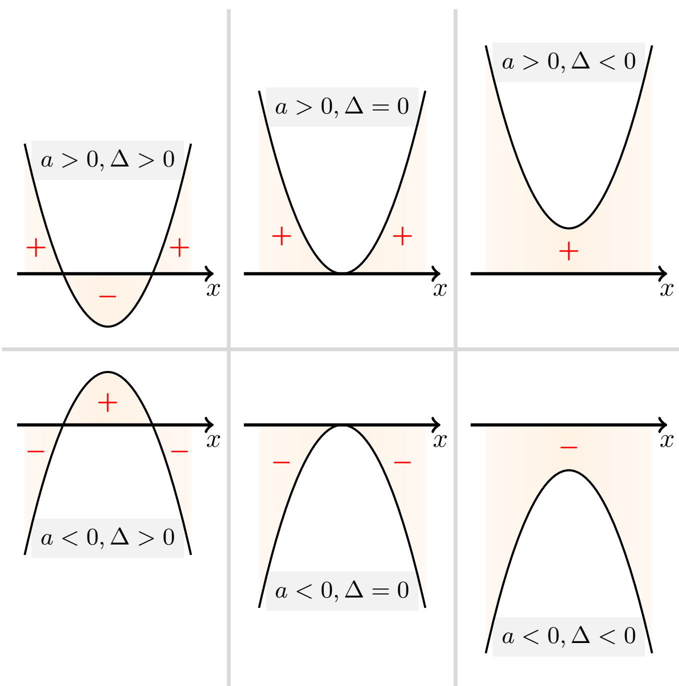


Figura 1: sinais da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ de acordo com os sinais de a e Δ.

Solução. Calculando $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$, vemos que $f(x)$ possui as raízes 1 e 4 (em particular, estamos no caso em que $\Delta > 0$). Além disso, ela possui concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$. Observando o caso $a > 0$, $\Delta > 0$ na Figura 1, concluímos que:

- $f(x) > 0$ quando $x < 1$ ou $x > 4$;
- $f(x) = 0$ quando $x = 1$ ou $x = 4$;
- $f(x) < 0$ quando $1 < x < 4$.

Usando um quadro de sinais, este resultado pode ser descrito da seguinte maneira sucinta:

		1		4		x
$x^2 - 5x + 4$	$+$	0	$-$	0	$+$	

□

Solução alternativa. Assim como na solução anterior, iniciamos observando que as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ são 1 e 4. Então, escrevemos a expressão $x^2 - 5x + 4$ em sua forma fatorada, $(x-1)(x-4)$, o que mostra que o sinal de $f(x)$ depende dos sinais das funções $x - 1$ e $x - 4$. O resultado desejado segue do quadro de sinais para o produto $f(x) = (x-1)(x-4)$:

		1		4		x
$x - 1$	$-$		$+$	0	$+$	
$x - 4$	$-$	0	$-$		$+$	
$f(x) = (x-1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Então, $f(x) < 0$ se, e somente se, $1 < x < 4$.

□

Exemplo 8. *Encontre todos os valores reais de x que satisfazem a seguinte inequação: $x(x-2) > x(2x+1)$.*

Solução. Veja que não podemos simplesmente cancelar x dos dois lados da inequação, pois não sabemos se x é positivo, negativo ou zero, e o efeito do cancelamento depende do sinal de x. Assim, para simplificar a inequação vamos começar desenvolvendo os produtos dos dois lados, obtendo

$$x^2 - 2x > 2x^2 + x.$$

Isso equivale a

$$(x^2 - 2x) - (2x^2 + x) > 0$$

ou, ainda, a

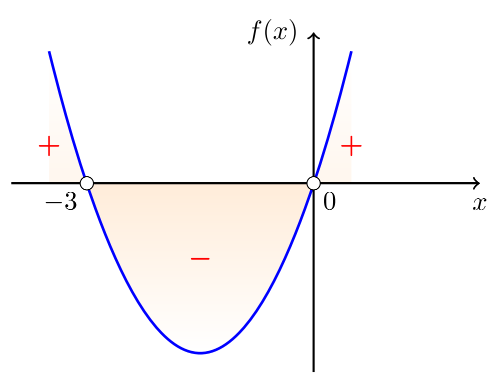
$$-x^2 - 3x > 0.$$

Como

$$-x^2 - 3x > 0 \Longleftrightarrow x^2 + 3x < 0,$$

concluímos que basta analisar o sinal da função $f(x) = x^2 + 3x$, descobrindo onde ela é estritamente negativa.

Lembrando do que foi estudado no módulo sobre funções quadráticas, vemos que o gráfico dessa função corta o eixo-x em $x = -3$ e $x = 0$, sendo uma parábola com concavidade para cima. Podemos esboçar tal gráfico como abaixo (novamente, estamos no caso em que $a > 0$ e $\Delta > 0$ da Figura 1):



Então, concluímos que $f(x) < 0$ precisamente quando $-3 < x < 0$. □

Observação 9. *Retomando nossa observação inicial na solução anterior, veja que, se apenas cancelássemos x na inequação original, obteríamos $x - 2 > 2x + 1$, o que corresponderia a $x < -3$. Mas, como sabemos pela solução apresentada, esta resposta está errada.*

Contudo, sugerimos ao leitor refazer o exemplo anterior a partir da observação de que

$$\begin{aligned} x(x-2) > x(2x+1) &\iff x(x-2) - x(2x+1) > 0 \\ &\iff x[(x-2) - (2x+1)] > 0 \\ &\iff x(-x-3) > 0 \\ &\iff x(x+3) < 0. \end{aligned}$$

Exemplo 10. *Encontre todos os valores de x que satisfazem a inequação $(8 - 2x^2)(6x - 18) \leq 0$.*

Solução. Considere as funções $f(x) = 8 - 2x^2$ e $g(x) = 6x - 18$.

Análise do sinal de $f(x)$: inicialmente, fazendo $f(x) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 8 - 2x^2 = 0 \iff 2x^2 = 8 &\iff x^2 = 4 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Assim temos duas raízes distintas (o que indica $\Delta > 0$) e o coeficiente de x^2 é negativo. Observando o caso $a < 0, \Delta > 0$ da Figura 1, construímos o quadro de sinais abaixo:

		-2		2		x
$8 - 2x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Análise do sinal de $g(x)$: fazendo $g(x) = 0$, temos:

$$6x - 18 = 0 \iff x = 3.$$

Como $g(x)$ é uma função de primeiro grau onde o coeficiente de x é positivo, estamos na seguinte situação:

		3		x
$6x - 18$	$-$	0	$+$	

Quadro de sinais para o produto: agrupando os resultados em uma única tabela, como $-2 < 2 < 3$, ficamos com o quadro seguinte:

		-2		2		3		x
$8 - 2x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$6x - 18$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(8 - 2x^2)(6x - 18)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Note que, desta vez, como a inequação é do tipo "$\leq$", devemos escolher os intervalos com sinal negativo, juntamente com suas extremidades. Assim, o conjunto-solução é:

$$\begin{aligned} S &= [-2, 2] \cup [3, \infty) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}. \end{aligned}$$

□

Solução alternativa. Fatorando $8 - 2x^2$, temos:

$$8 - 2x^2 = 2(4 - x^2) = 2(2 - x)(2 + x).$$

Temos também que

$$6x - 18 = 6(x - 3).$$

Dessa forma, a inequação do exemplo é equivalente a

$$2(2 - x)(2 + x)6(x - 3) \leq 0$$

ou, simplesmente,

$$(2 - x)(2 + x)(x - 3) \leq 0.$$

Agora, essa inequação está no formato adequado para ser resolvida usando o mesmo método do Exemplo 4. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que este assunto seja abordado em dois encontros de 50 minutos. É importante que os exemplos resolvidos sejam os mais variados possíveis, para que o aluno não faça inferências errôneas a respeito do assunto. Em particular, nos exemplos de inequações-produto, tente incluir combinações de fatores que cubram o maior número possível de casos da Figura 1 – por exemplo, é possível que em certas inequações o conjunto-solução seja vazio ou contenha apenas um ponto. Também seria interessante fazer um exemplo com três fatores de grau dois que possuem alguns zeros em comum. Faremos mais exemplos nas aulas seguintes desse módulo.

Apesar de que neste material não desenhamos muitos gráficos, ao resolver os problemas no quadro-negro, fazer um rápido esboço dos gráficos das funções (lineares e quadráticas) facilitará bastante a compreensão e o preenchimento do quadro de variação dos sinais. Nesse sentido, é muito importante que o aluno tenha em mente a forma desses gráficos, no lugar de simplesmente memorizar a ordem dos sinais nas tabelas.

As leituras complementares abaixo contêm mais material sobre desigualdades e inequações.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.