

# Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos

## Pontos, Retas e Planos - Parte 2

### Terceiro Ano - Médio

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha**



# 1 Ângulo entre retas no espaço. Perpendicularidade

Considere, no espaço, duas retas  $r$  e  $s$  e um ponto  $P$ . Sejam  $r'$  e  $s'$  as retas paralelas a  $r$  e  $s$ , respectivamente, e passando por  $P$ . O menor ângulo entre as retas coplanares  $r'$  e  $s'$  é definido como o **ângulo entre  $r$  e  $s$** . Como caso particular, se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, dizemos que o ângulo entre elas é igual a zero.

Usamos a notação  $\angle rs$  para indicar a medida do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ . De acordo com a definição dada no parágrafo anterior, temos  $\angle rs = \angle sr$  e  $0 \leq \angle rs \leq 90^\circ$ . Recorde que, se  $r$  e  $s$  são retas coplanares tais que  $\angle rs = 90^\circ$ , dizemos que  $r$  e  $s$  são *perpendiculares*. Em geral se  $r$  e  $s$  são retas (não necessariamente coplanares) tais que  $\angle rs = 90^\circ$ , dizemos que  $r$  e  $s$  são **ortogonais** e denotamos  $r \perp s$ . Portanto, todo par de retas perpendiculares é também ortogonal, mas há pares de retas ortogonais que não são perpendiculares, simplesmente porque não se intersectam.

Se uma reta  $r$  é ortogonal a toda reta  $t$  contida em um plano  $\alpha$ , dizemos que  $r$  é **perpendicular ao plano  $\alpha$**  e denotamos  $r \perp \alpha$ . Se a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então  $r$  intersecta o plano  $\alpha$ . De fato, se fosse  $r \parallel \alpha$ , então existiria, pelo Teorema 9 da parte 1, uma reta  $r' \subset \alpha$  tal que  $r \parallel r'$ . Mas isso é uma contradição, pois qualquer reta contida em  $\alpha$  é, por definição, ortogonal a  $r$ .

**Teorema 1.** *Por um ponto  $P \notin \alpha$  passa uma única reta perpendicular ao plano  $\alpha$ .*

**Prova.** Suponha que existam duas retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , passando por  $P$  e perpendiculares ao plano  $\alpha$ . Seja  $\beta$  o plano determinado por  $\ell_1$  e  $\ell_2$  e seja  $t = \alpha \cap \beta$ . Então, as retas  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  e  $t$  são coplanares e  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são simultaneamente perpendiculares à reta  $t$ , o que é uma contradição.  $\square$

A seguir, exibiremos um critério suficiente para a perpendicularidade entre uma reta e um plano.

**Teorema 2.** *Se uma reta  $r$  é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano  $\alpha$ , então  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .*

**Prova.** Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  retas contidas em  $\alpha$  e ambas ortogonais à reta  $r$ . Devemos mostrar que  $r$  é ortogonal a toda reta  $\ell$  contida em  $\alpha$ . Inicialmente, observemos que  $r$  não é paralela a  $\alpha$ , pois do contrário  $r$  seria paralela a toda reta de  $\alpha$ , o que não ocorre. Agora seja  $N$  o ponto de interseção entre  $r$  e  $\alpha$ , e sejam  $\ell'_1$  e  $\ell'_2$  retas passando por  $N$  e paralelas, respectivamente, a  $\ell_1$  e  $\ell_2$  (veja a figura 1). Pela definição de ângulo entre retas, temos que  $r$  é perpendicular a  $\ell'_1$  e a  $\ell'_2$ . Isso nos permite supor, sem perda de generalidade, que as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  passam por  $N$  (razão pela qual, na figura 1, elas aparecem nomeadas como  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , em vez de  $\ell'_1$  e  $\ell'_2$ ).

Sejam  $A \in \ell_1$  e  $B \in \ell_2$  tais que  $\overline{AN} = \overline{BN}$  e sejam  $P, P' \in r$  tais que  $\overline{PN} = \overline{P'N}$  (veja novamente a figura 1).

Como  $r \perp \ell_1$  e  $r \perp \ell_2$ , os triângulos  $ANP$ ,  $BNP$ ,  $ANP'$  e  $BNP'$  são todos congruentes (conforme o axioma (E-6) da parte 1 e o caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado). Em particular,  $\overline{PA} = \overline{P'A} = \overline{PB} = \overline{P'B}$ . Logo, os triângulos  $ABP$  e  $ABP'$  são congruentes (novamente pelo axioma (E-6) da parte 1 e pelo caso de congruência lado-lado-lado). Consequentemente, os ângulos  $\angle PAD$  e  $\angle P'AD$  são congruentes.

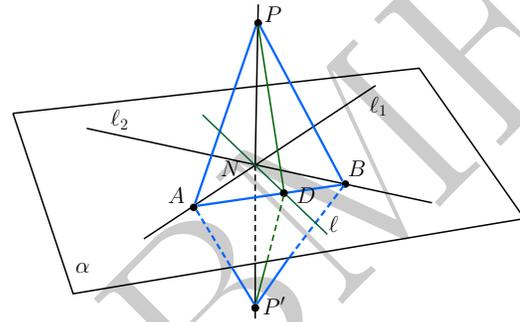


Figura 1: condição suficiente para perpendicularidade entre reta e plano.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a reta  $\ell$  intersecta o segmento  $AB$  no ponto  $D$ . Como  $\widehat{PAD} = \widehat{P'AD}$ , os triângulos  $PAD$  e  $P'AD$  são congruentes (uma vez mais pelo axioma (E-6) e pelo caso de congruência lado-ângulo-lado). Assim,  $\overline{PD} = \overline{P'D}$ , de forma que o triângulo  $PP'D$  é isósceles. Mas, como  $\overline{PN} = \overline{P'N}$  por construção, temos que o segmento  $DN$  é mediana relativa à base  $PP'$  do triângulo isósceles  $PP'D$ . Logo,  $DN$  também é altura relativa à base, e segue daí que  $DN \perp PP'$ . Então,  $\ell \perp r$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

A recíproca do resultado anterior é evidente, de forma que ele fornece uma caracterização do perpendicularismo entre retas e planos. A seguir, mostraremos que a perpendicular a um plano passando por um ponto efetivamente existe.

**Teorema 3.** *Dados um plano  $\alpha$  e um ponto  $P$  do espaço, existe uma única reta perpendicular a  $\alpha$  e passando por  $P$ .*

**Prova.** A unicidade da perpendicular já foi demonstrada no Teorema 1. Vamos mostrar a sua existência.

Suponhamos, inicialmente, que  $P \notin \alpha$ . Seja  $s$  uma reta contida no plano  $\alpha$  e  $\beta$  o plano determinado por  $s$  e  $P$  (veja a figura 2). Considere a reta  $t$ , contida em  $\beta$  e perpendicular à reta  $s$ , e seja  $Q$  o ponto de interseção entre as retas  $s$  e  $t$ . Seja  $u$  a reta contida no plano  $\alpha$  e perpendicular à reta  $s$  pelo ponto  $Q$ . Enfim, seja  $r$  a reta contida no plano  $\gamma$ , determinado por  $t$  e  $u$ , passando por  $P$  e perpendicular à reta  $u$ .

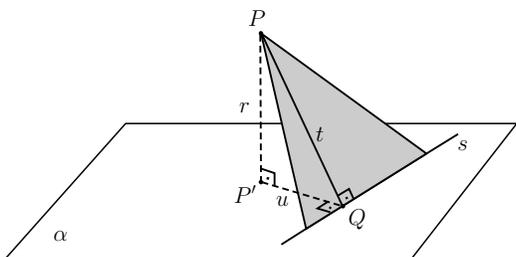


Figura 2: existência de uma perpendicular ao plano  $\alpha$  por um ponto  $P \notin \alpha$ .

Por construção, temos  $r \perp u$ . Também por construção, temos  $s \perp u$  e  $s \perp t$ . Pelo Teorema 2,  $s$  é perpendicular ao plano  $\gamma$  e, pela definição de reta perpendicular a plano,  $s$  é ortogonal a qualquer reta contida em  $\gamma$ . Em particular,  $r \perp s$ , pois  $r \subset \gamma$ . Assim,  $r \perp u$  e  $r \perp s$ , que são duas retas concorrentes contidas no plano  $\alpha$ . Novamente pelo Teorema 2, a reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , como queríamos demonstrar.

Suponha, agora, que  $P \in \alpha$ . Tome um ponto  $P' \notin \alpha$  e trace por  $P'$  duas retas concorrentes  $u'$  e  $s'$ , ambas paralelas a  $\alpha$ . Se  $\alpha'$  é o plano determinado por  $u'$  e  $s'$ , então  $P \notin \alpha'$ , de forma que o caso anterior garante a existência de uma reta  $r$ , perpendicular a  $\alpha'$  e passando por  $P$ . Agora, sejam  $u$  e  $s$  as retas paralelas a  $u'$  e  $s'$ , respectivamente, e passando por  $P$ . Então, temos  $u, s \subset \alpha$  e  $u' \perp r \Rightarrow u \perp r$ ,  $s' \perp r \Rightarrow s \perp r$ . Portanto,  $r$  é perpendicular às retas concorrentes  $u$  e  $s$  do plano  $\alpha$ , de forma que  $r \perp \alpha$ .  $\square$

Reciprocamente à discussão do segundo caso na demonstração do teorema anterior, temos o exemplo a seguir.

**Exemplo 4.** *Mostre que dois planos distintos e perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.*

**Solução.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos distintos, perpendiculares à reta  $r$ . Como  $\alpha \neq \beta$ , temos que esses planos ou são paralelos ou sua interseção é uma reta. Vamos mostrar que essa segunda opção não ocorre.

Por contradição, suponha que  $\alpha \cap \beta = t$ , uma reta. Sejam  $A, B$  e  $P$  pontos escolhidos do seguinte modo:  $\{A\} = r \cap \alpha$ ,  $\{B\} = r \cap \beta$  e  $P$  é um ponto qualquer da reta  $t$ .

Inicialmente, afirmamos que os pontos  $A, B$  e  $P$  não são colineares. De fato, se o fossem, a reta  $r$  teria dois pontos em  $\alpha$ , (os pontos  $A$  e  $P$ ) e também dois pontos em  $\beta$ , (os pontos  $B$  e  $P$ ); logo, teríamos  $r = t$ . Mas isso não é possível, porque  $r$  é perpendicular a  $\alpha$  e a  $\beta$ , enquanto  $t$  está contida em  $\alpha$  e em  $\beta$ .

Assim,  $A, B$  e  $P$  formam um triângulo. O lado  $AP$  desse triângulo está contido em  $\alpha$ ; logo, é perpendicular a  $AB$ , que tem  $r$  como reta suporte. Da mesma forma, o lado  $BP$  do triângulo está contido em  $\beta$ ; logo, também é perpendicular a  $AB$ . Com isso, o triângulo  $ABP$  teria dois ângulos internos retos, o que é impossível.

Como a suposição de que a interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  é uma reta nos levou a uma contradição, somos forçados a concluir que tais planos são paralelos.  $\square$

Se  $P \notin \alpha$  e  $r$  é a reta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $\alpha$ , chamamos o ponto de interseção  $P'$  entre  $r$  e  $\alpha$  de **pé da perpendicular** baixada de  $P$  e  $\alpha$  (veja a figura 3, a seguir).

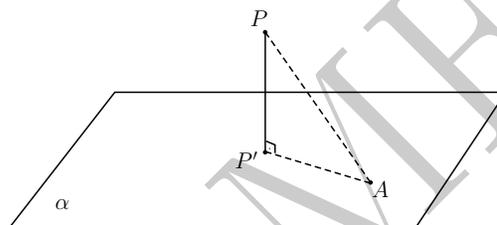


Figura 3: o pé da perpendicular como o ponto do plano mais próximo de  $P$ .

Se  $A \in \alpha$  e  $A \neq P'$ , então os pontos  $A, P$  e  $P'$  não são colineares e, portanto, determinam um plano  $\beta \neq \alpha$ . Como  $r \perp \alpha$ , temos  $r$  perpendicular à reta  $AP$  de forma que o triângulo  $APP'$  é retângulo em  $P'$ . Logo, o segmento  $AP$ , sendo a hipotenusa de  $APP'$ , tem medida maior do que a do cateto  $PP'$ . Dessa forma, o ponto do plano que está a uma distância mínima de  $P$  é exatamente o ponto  $P'$ , pé da perpendicular baixada de  $P$  ao plano  $\alpha$ . Assim, definimos a **distância** do ponto  $P$  ao plano  $\alpha$  como

$$d(P, \alpha) = \overline{PP'},$$

o comprimento do segmento  $PP'$ .

Se  $A \in \alpha$  e  $P \notin \alpha$  são tais que  $AP$  é uma reta não perpendicular ao plano  $\alpha$  (veja a figura 3), dizemos que a reta  $AP$  é **oblíqua** ao plano  $\alpha$ . Se  $P'$  é o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $\alpha$ , a reta  $AP'$  é denominada a **projecção** da reta  $AP$  sobre o plano  $\alpha$ . As mesmas definições valem para segmentos.

O teorema a seguir, cuja demonstração é uma destilação da prova do Teorema 3, é conhecido como o **Teorema das Três Perpendiculares**.

**Teorema 5.** *Sejam dados um plano  $\alpha$  e pontos  $A$  e  $P$ , com  $A \in \alpha$  e  $P \notin \alpha$ , tais que a reta  $AP$  é oblíqua a  $\alpha$ . Seja, ainda,  $l$  uma reta de  $\alpha$ . Então,  $l \perp AP$  se, e só se,  $l \perp AP'$ , onde  $AP'$  é a projeção de  $AP$  sobre  $\alpha$ .*

**Prova.** Pela definição de projeção, o ponto  $P'$  é o pé da perpendicular baixada desde  $P$  ao plano  $\alpha$  (veja a figura 4). Dessa forma,  $PP' \perp \alpha$  e, como  $l \subset \alpha$ , temos  $PP' \perp l$ .

As retas  $PP'$ ,  $AP$  e  $AP'$  estão todas contidas em um mesmo plano, aquele determinado pelos pontos  $A, P$  e  $P'$ , o qual chamaremos de  $\beta$ .

Supondo que  $\ell \perp AP$ , vemos que  $\ell$  é ortogonal às retas concorrentes  $AP$  e  $PP'$ , as quais estão ambas contidas em  $\beta$ . Pelo Teorema 2, temos então que  $\ell \perp \beta$ . Em particular,  $\ell \perp AP'$ , uma vez que a reta  $AP'$  também está contida em  $\beta$ .

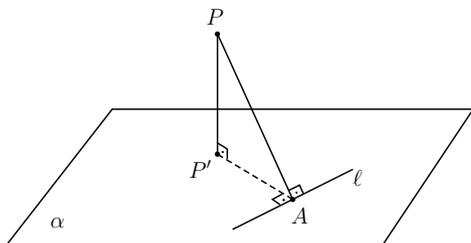


Figura 4: o teorema das três perpendiculares.

Reciprocamente, supondo que  $\ell \perp AP'$ , vemos que  $\ell \perp AP'$  e  $\ell \perp PP'$  implicam  $\ell \perp \beta$ , pois  $AP'$  e  $PP'$  são duas retas concorrentes desse plano. Em particular, temos  $\ell \perp AP$ , uma vez que a reta  $AP$  também está contida em  $\beta$ .  $\square$

## 2 Ângulos diedros

Nessa seção, generalizamos a noção geométrica de ângulo plano para uma noção similar no espaço, chamada *ângulo diedro*.

Sabemos que uma reta  $\ell$ , contida em um plano  $\alpha$ , o divide em dois subconjuntos  $\ell^+$  e  $\ell^-$ , denominados os *sempianos* determinados por  $\ell$ , tais que  $\ell^+ \cup \ell^- = \alpha$  e  $\ell^+ \cap \ell^- = \ell$ . Dado em  $\alpha$  um ponto  $O$  e retas  $r$  e  $s$  concorrentes em  $O$ , temos os semiplanos  $r^+$ ,  $r^-$ ,  $s^+$  e  $s^-$ . A interseção de  $r^+$  ou  $r^-$  com  $s^+$  ou  $s^-$  (a porção duplamente hachurada na figura 5) é denominada um **ângulo plano** com vértice em  $O$ .

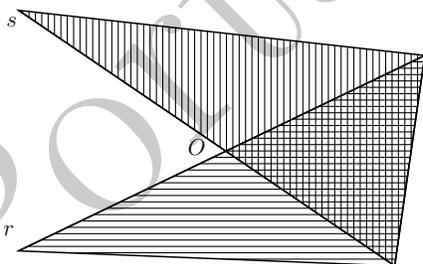


Figura 5: ângulo plano como interseção de dois semiplanos.

Agora, consideremos dois planos distintos e não paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ , cuja interseção é a reta  $\ell$  (veja a figura 6). Cada

um desses planos divide o espaço em dois *semiespaços*, denotados  $\alpha^+$  e  $\alpha^-$  para o plano  $\alpha$  e  $\beta^+$  e  $\beta^-$  para o plano  $\beta$ . De modo análogo ao que fizemos no parágrafo anterior para retas contidas em um plano, as interseções de  $\alpha^+$  ou  $\alpha^-$  com  $\beta^+$  ou  $\beta^-$  dividem o espaço em quatro regiões, cada uma das quais é chamada um **ângulo diedro** com **faces**  $\alpha$  e  $\beta$  e **aresta**  $\ell$ .

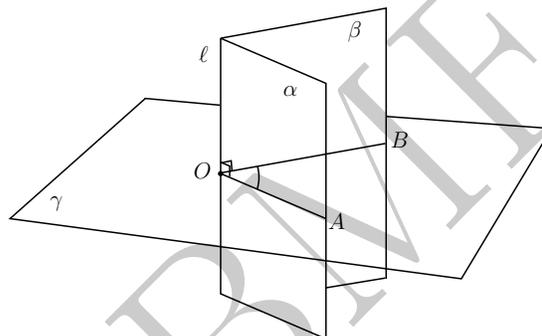


Figura 6: um dos ângulos diedros determinados pelos planos não paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Os pontos de um ângulo diedro que não pertencem a uma qualquer de suas faces são chamados **pontos interiores do diedro**.

Usamos a notação  $\angle \alpha \ell \beta$  para indicar o ângulo diedro de faces  $\alpha$  e  $\beta$  e aresta  $\ell$ . Se for claro pelo contexto quais são as faces do ângulo, podemos denotá-lo simplesmente por  $\angle \ell$ .

Dado um ângulo diedro  $\angle \alpha \ell \beta$ , consideremos um ponto  $O \in \ell$  e um plano  $\gamma$  passando por  $O$  e perpendicular a  $\ell$  (veja novamente a figura 6). Obtemos, assim, o ângulo  $\angle AOB = \gamma \cap \angle \alpha \ell \beta$ .

Observamos que a medida desse ângulo plano não depende da posição do ponto  $O$  sobre a aresta  $\ell$ . De fato (veja a figura 7), se  $O'$  for outro ponto sobre  $\ell$  e  $\gamma'$  for o plano perpendicular a  $\ell$  e passando por  $O'$ , então  $\gamma'$  é paralelo a  $\gamma$ . Escolhamos  $A$  em  $\gamma \cap \alpha$  e  $A'$  em  $\gamma' \cap \alpha$  tais que  $\overline{OA} = \overline{O'A'}$  e, da mesma forma,  $B \in \gamma \cap \beta$  e  $B' \in \gamma' \cap \beta$  tais que  $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ .

Por possuírem um par de lados opostos paralelos e de comprimentos iguais, os quadriláteros  $OAA'O'$  e  $OBB'O'$  são paralelogramos. Portanto, são paralelos e têm comprimentos iguais os outros dois pares de lados de tais paralelogramos, quais sejam,  $OO'$  e  $AA'$ ,  $OO'$  e  $BB'$ . Assim, também temos que  $AA'$  e  $BB'$  são paralelos e têm comprimentos iguais, de forma que  $ABB'A'$  também é um paralelogramo. Logo,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

Assim, os triângulos  $OAB$  e  $O'A'B'$  são congruentes, pelo axioma (E-6) e pelo caso lado-lado-lado de congruência de triângulos. Em particular, os ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle A'O'B'$  têm a mesma medida.

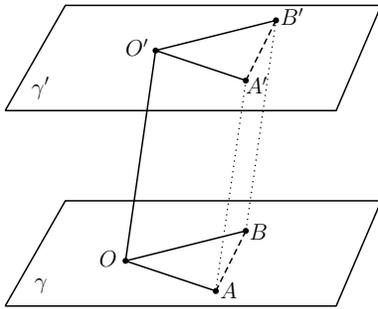


Figura 7: invariância da medida do ângulo diedro.

A discussão anterior nos permite definir, de maneira não ambígua, a **medida** do ângulo diedro  $\angle\alpha\beta$  como sendo igual à medida do ângulo plano

$$\angle AOB = \gamma \cap \angle\alpha\beta,$$

onde  $\gamma$  é o plano perpendicular a  $l$  em  $O$  e  $\alpha \cap \gamma = OA$ ,  $\beta \cap \gamma = OB$  (como na figura 6).

Um ângulo diedro  $\angle\alpha\beta$  é chamado **agudo, reto** ou **obtusado**, conforme seu ângulo plano correspondente  $\angle AOB$ , definido como no parágrafo anterior, seja agudo, reto ou obtuso, respectivamente.

O **ângulo entre dois planos** distintos e não paralelos é, então, definido como o menor dos ângulos diedros formados por esses dois planos. Dessa forma, o ângulo entre dois planos distintos e não paralelos tem medida maior que  $0^\circ$  e menor ou igual a  $90^\circ$ .

Dois planos distintos são **perpendiculares** se forem não paralelos e formarem um ângulo de  $90^\circ$ . Equivalentemente, dois planos distintos e não paralelos são perpendiculares se os quatro ângulos diedros por eles formados forem todos iguais a  $90^\circ$  (veja a figura 8). Para indicar que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares, escrevemos  $\alpha \perp \beta$ .

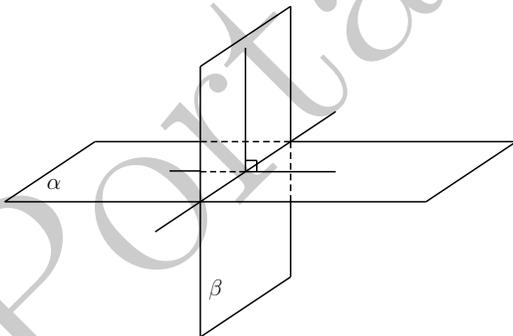


Figura 8: planos perpendiculares.

No que segue, vamos exibir um critério simples de perpendicularidade entre dois planos.

**Teorema 6.** Se um plano contém uma reta perpendicular a outro plano, então esses dois planos são perpendiculares.

**Prova.** Suponhamos que a reta  $l$  está contida no plano  $\beta$  e é perpendicular ao plano  $\alpha$  (veja a figura 9). Queremos mostrar que  $\alpha \perp \beta$ .

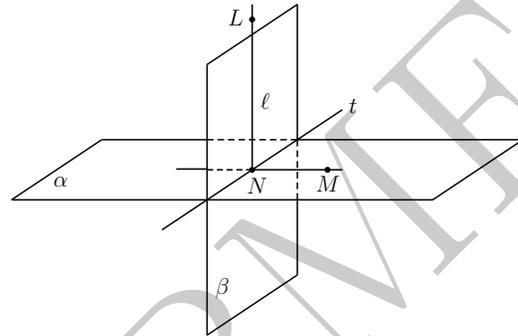


Figura 9: critério para perpendicularismo de dois planos distintos.

Sejam  $\alpha \cap \beta = t$ ,  $l \cap \alpha = \{N\}$  e  $MN \subset \alpha$  a reta perpendicular à reta  $t$  e passando pelo ponto  $N$ . Como  $t \subset \alpha$  e  $\alpha \perp l$ , temos  $t \perp l$ . Também, por construção temos  $t \perp MN$ . Assim, pelo Teorema 2, a reta  $t$  e o plano determinado pela reta  $l$  e pelo ponto  $M$  são perpendiculares. Em particular, a medida do ângulo diedro  $\angle\alpha\beta$  é igual à medida do ângulo plano  $\angle LNM$ . Mas, como  $l \perp MN$ , temos  $\angle LNM = 90^\circ$ , ou seja, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares.  $\square$

Para o exemplo a seguir, dados pontos não coplanares  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , sejam  $(ABC)^+$  o semiespaço definido pelo plano  $(ABC)$  e contendo o ponto  $D$ ,  $(ABD)^+$  o semiespaço definido pelo plano  $(ABC)$  e contendo o ponto  $C$ ,  $(ACD)^+$  o semiespaço definido pelo plano  $(ABC)$  e contendo o ponto  $B$ ,  $(BCD)^+$  o semiespaço definido pelo plano  $(ABC)$  e contendo o ponto  $A$ . O **tetraedro**  $ABCD$  é a porção do espaço definida como  $(ABC)^+ \cap (ABD)^+ \cap (ACD)^+ \cap (BCD)^+$  (veja a figura 10).

Dado um tetraedro  $ABCD$ , os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são seus **vértices**, os segmentos  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  e  $CD$  são suas **arestas** e os triângulos  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$  e  $BCD$  são suas **faces**. Duas faces de  $ABCD$  são **adjacentes** se tiverem uma aresta em comum. Por fim, um tetraedro  $ABCD$  é **regular** se todas as suas faces forem triângulos equiláteros.

**Exemplo 7.** Calcule a medida aproximada do ângulo diedro formado por duas faces adjacentes de um tetraedro regular.

**Solução.** Sejam  $ABCD$  um tetraedro regular (veja a figura 10) e  $F$  o pé da perpendicular baixada desde o vértice

A do tetraedro até o plano que contém a base  $BCD$ . Como  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$  e os triângulos  $ABF$ ,  $ACF$  e  $ADF$  são todos retângulos em  $F$ , segue do Teorema de Pitágoras que  $\overline{BF} = \overline{CF} = \overline{DF}$ . Portanto,  $F$  é o circuncentro do triângulo equilátero  $BCD$ , e a Geometria Plana elementar ensina que  $BF$ ,  $CF$  e  $DF$  também são alturas de  $BCD$  e que, sendo  $E$  o ponto de interseção de  $DF$  e  $BC$ , temos que  $E$  é médio de  $BC$  e  $\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{DE}$ .

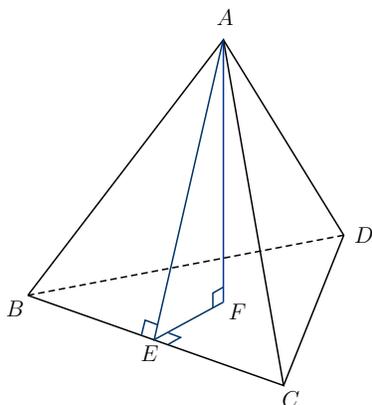


Figura 10: ângulo diedro entre as faces de um tetraedro.

Agora, uma vez que as faces do tetraedro são triângulos congruentes, as alturas de  $ABC$  e  $BCD$  relativa a  $BC$  são iguais. Assim,  $EF = \frac{1}{3}AE$  e, se  $\theta = \angle AEF$ , então  $\cos \theta = \frac{EF}{AE} = \frac{1}{3}$ . Isso implica que  $\theta \approx 70^\circ 31' 44''$ . Veja que  $AE$  e  $DE$  são ambas perpendiculares a  $BC$ , de forma que  $\angle AED = \angle AEF$  é o ângulo diedro entre as faces  $ABC$  e  $BCD$  do tetraedro.

Por fim, o raciocínio acima pode ser repetido para qualquer par de faces de  $ABCD$ , de forma que todos os ângulos diedros formados por elas são aproximadamente iguais a  $70^\circ 31' 44''$ .  $\square$

### 3 Projeções ortogonais

Sejam  $\alpha$  um plano e  $P$  um ponto do espaço. Se  $t$  é a reta perpendicular a  $\alpha$  e passando por  $P$ , chamamos o ponto  $P'$ , onde a reta  $t$  intersecta o plano  $\alpha$ , de **projeção ortogonal** de  $P$  sobre  $\alpha$ . O plano  $\alpha$  é chamado o **plano de projeção**.

Como existe uma única reta perpendicular a  $\alpha$  e passando por  $P$ , o ponto  $P'$  é univocamente determinado por  $P$ , ou seja, para cada ponto  $P$  do espaço, existe uma única projeção ortogonal sobre o plano  $\alpha$ . Se  $P \in \alpha$ , então  $P = P'$ .

A projeção ortogonal de uma reta  $\ell$  sobre um plano  $\alpha$  é o conjunto das projeções ortogonais sobre  $\alpha$  de todos os pontos  $P \in \ell$ . O teorema a seguir esclarece o efeito de uma projeção ortogonal sobre retas. Em palavras, ela

garante que a operação de projeção ortogonal sobre um plano preserva colinearidade e paralelismo.

**Teorema 8.** A projeção ortogonal sobre um plano  $\alpha$  tem as seguintes propriedades:

- Se uma reta  $\ell$  não é perpendicular a  $\alpha$ , então sua projeção ortogonal sobre  $\alpha$  também é uma reta.
- Se uma reta  $\ell$  é paralela a  $\alpha$ , então ela também é paralela à sua projeção ortogonal sobre  $\alpha$ .
- As projeções ortogonais de duas retas paralelas, não perpendiculares a  $\alpha$ , são duas retas também paralelas.

**Prova.**

(a) Se  $\ell \subset \alpha$ , então  $\ell$  coincide com sua projeção ortogonal sobre  $\alpha$ . Se  $\ell \not\subset \alpha$ , tome  $P \in \ell$  tal que  $P \notin \alpha$ , e sejam  $P' \in \alpha$  sua projeção ortogonal e  $\beta$  o plano determinado por  $\ell$  e  $P'$ . Como o plano  $\beta$  contém a reta  $PP'$ , a qual é perpendicular ao plano  $\alpha$ , segue do Teorema 6 que  $\beta \perp \alpha$ . Dessa forma, se  $X \in \ell$  e  $X' \in \alpha$  é a projeção ortogonal de  $X$  sobre  $\alpha$ , então  $XX' \subset \beta$ , de forma que  $X' \in \alpha \cap \beta$ . Mas, como  $\alpha \cap \beta$  é uma reta  $\ell'$ , segue que a projeção ortogonal de  $\ell$  sobre  $\alpha$  está contida em  $\ell'$ . Reciprocamente, é imediato reverter os passos do argumento anterior para mostrar que todo ponto  $X' \in \ell'$  é a projeção ortogonal sobre  $\alpha$  de um ponto  $X \in \ell$ . Logo,  $\ell'$  é a projeção ortogonal de  $\ell$  sobre  $\alpha$ .

(b) Se  $\ell$  e  $\ell'$  tivessem um ponto  $P$  em comum, então teríamos  $P \in \ell \cap \ell' \subset \ell \cap \alpha = \emptyset$ , o que é um absurdo. Logo,  $\ell \parallel \ell'$ .

(c) Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  duas retas paralelas, não perpendiculares a  $\alpha$ , e  $\ell'_1$  e  $\ell'_2$  as projeções ortogonais de  $\ell_1$  e  $\ell_2$  sobre  $\alpha$ , respectivamente. Sejam  $\beta_1$  e  $\beta_2$  os planos determinados por  $\ell_1$  e  $\ell'_1$  e por  $\ell_2$  e  $\ell'_2$ , também respectivamente. Como  $\beta_1 \perp \alpha$  e  $\beta_2 \perp \alpha$ , temos que existem retas  $r_1$  e  $r_2$  contidas em  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente, tais que  $r_1, r_2 \perp \alpha$ . Como  $\ell_1, r_1 \subset \beta_1$  e  $\ell_1 \not\perp \alpha$ ,  $r_1 \perp \alpha$ , temos que  $\ell_1$  e  $r_1$  são concorrentes. Analogamente,  $\ell_2$  e  $r_2$  também são concorrentes. Então,  $\beta_1$  contém as retas concorrentes  $\ell_1$  e  $r_1$ , as quais são respectivamente paralelas às retas concorrentes  $\ell_2$  e  $r_2$ , que por sua vez estão contidas em  $\beta_2$ . Logo,  $\beta_1 \parallel \beta_2$ . Assim,  $\ell'_1 = \alpha \cap \beta_1$  e  $\ell'_2 = \alpha \cap \beta_2$  são retas coplanares e sem pontos em comum (pois, do contrário,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  teriam pontos em comum). Logo,  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são paralelas.  $\square$

Dados um plano  $\alpha$  e um segmento  $AB$ , a **projeção ortogonal** de  $AB$  sobre  $\alpha$  é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos de  $AB$  sobre  $\alpha$ .

Conforme veremos a seguir, a razão entre os comprimentos de segmentos paralelos é preservada por projeção ortogonal. Começamos mostrando que, em geral, uma projeção ortogonal transforma segmentos de reta em segmentos de reta.

**Teorema 9.** *Seja  $AB$  um segmento não perpendicular ao plano  $\alpha$ . Se  $A'$  e  $B'$  são as projeções ortogonais dos pontos  $A$  e  $B$  sobre  $\alpha$ , respectivamente, então  $A'B'$  é a projeção ortogonal de  $AB$  sobre  $\alpha$ .*

**Prova.** Vimos, no Teorema 8, que a projeção ortogonal da reta  $AB$  é a reta  $A'B'$ . Se  $\beta$  é o plano que contém as retas  $AB$  e  $A'B'$ , então  $\beta$  também contém as retas  $AA'$  e  $BB'$ .

No plano  $\beta$ , sejam  $AA^+$  o semiplano determinado pela reta  $AA'$  e contendo o ponto  $B$  e  $BB^+$  o semiplano determinado pela reta  $BB'$  e contendo o ponto  $A$ . Como  $AA' \parallel BB'$  e  $A \in BB^+$ , temos que  $A' \in BB^+$ ; como  $BB' \parallel AA'$  e  $B \in AA^+$ , temos que  $B' \in AA^+$ . Como  $A \in BB^+$ , temos que  $AB \subset BB^+$ ; analogamente,  $AB \subset AA^+$ . Então, se  $P \in AB$ , temos que  $P \in AA^+ \cap BB^+$ . Mas aí, sendo  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre  $\alpha$ , temos que:  $P \in AA^+$  e  $PP' \parallel AA'$  implicam  $P' \in AA^+$ ; analogamente,  $P \in BB^+$  e  $PP' \parallel BB'$  implicam  $P' \in BB^+$ . Assim,

$$P' \in A'B' \cap AA^+ \cap BB^+,$$

e esse último conjunto é precisamente o segmento de reta  $A'B'$ , de forma que  $P'$  pertence a tal segmento.

Reciprocamente, se  $P'$  pertence ao segmento de reta  $A'B'$ , então sabemos que  $P'$  é a projeção ortogonal sobre  $\alpha$  de um ponto  $P$  situado sobre a reta  $AB$ . Contudo, não é difícil reverter os passos do argumento acima para mostrar que, de fato,  $P$  pertence ao segmento de reta  $AB$ .

Logo, o segmento  $AB$  é projetado ortogonalmente sobre  $\alpha$  no segmento  $A'B'$ .  $\square$

O resultado anterior admite uma consequência importante para o que faremos em seguida.

**Corolário 10.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos não perpendiculares. Se  $ABCD$  é um paralelogramo situado no plano  $\beta$ , então a projeção ortogonal de  $ABCD$  sobre  $\alpha$  é outro paralelogramo.*

**Prova.** Como  $\beta \not\perp \alpha$ , temos que os lados de  $ABCD$  não são perpendiculares a  $\alpha$ . Como retas paralelas são projetadas ortogonalmente em retas paralelas e segmentos de reta são projetados ortogonalmente em segmentos de reta, concluímos que dois segmentos de reta paralelos são projetados ortogonalmente em dois segmentos de reta paralelos. Logo, sendo  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  as projeções ortogonais de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sobre  $\alpha$ , temos que  $AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$  e  $AD \parallel BC \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$ . Então,  $A'B'C'D'$  é um quadrilátero com pares de lados opostos paralelos, logo, um paralelogramo.  $\square$

**Teorema 11.** *Sejam  $AB$  e  $CD$  dois segmentos paralelos, não perpendiculares ao plano  $\alpha$ . Se  $A'B'$  e  $C'D'$  são as projeções ortogonais de  $AB$  e  $CD$  sobre  $\alpha$ , respectivamente, então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

**Prova.** Considere, sobre a reta  $AB$ , pontos  $C_1$  e  $D_1$  tais que  $\overline{C_1D_1} = \overline{CD}$ . Como  $AB \parallel CD$ , o quadrilátero  $C_1D_1DC$  tem dois lados opostos ( $CD$  e  $C_1D_1$ ) paralelos e iguais, logo, é um paralelogramo. Sejam  $C'_1$  e  $D'_1$  as projeções ortogonais de  $C_1$  e  $D_1$  sobre o plano  $\alpha$ , e consideremos dois casos separadamente:

(i) o plano  $\beta$ , que contém  $AB$  e  $CD$ , não é perpendicular a  $\alpha$ : nesse caso, segue do corolário anterior que  $C'_1D'_1D'C'$  é um paralelogramo e, daí,  $\overline{CD} = \overline{C_1D_1}$  e  $\overline{C'D'} = \overline{C'_1D'_1}$ . Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'_1D'_1}}. \quad (1)$$

(ii) o plano  $\beta$  é perpendicular a  $\alpha$ : nesse caso,  $C'_1D'_1D'C'$  não é mais um paralelogramo, mas Geometria Euclidiana plana elementar aplicada ao plano  $\beta$  garante que ainda temos  $\overline{CD} = \overline{C_1D_1}$  e  $\overline{C'D'} = \overline{C'_1D'_1}$ . Portanto, também nesse caso, (1) é válida.

O argumento anterior garante que podemos supor que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são pontos colineares. Mas, com essa hipótese adicional,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  também são colineares e as retas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  e  $DD'$  formam um feixe de retas paralelas contidas no plano  $\beta$ . O resultado segue, então, como consequência do Teorema de Tales da Geometria Euclidiana plana.  $\square$

Um argumento semelhante ao utilizado no início da Seção 2, para demonstrar a invariância da medida de um ângulo diedro, nos permite mostrar o resultado a seguir.

**Teorema 12.** *Se  $\alpha$  e  $\beta$  são planos paralelos e  $ABC$  é um triângulo contido em  $\beta$ , então a projeção ortogonal de  $ABC$  sobre  $\alpha$  é um triângulo  $A'B'C'$ , congruente a  $ABC$ .*

Terminamos este material relacionando a área de um polígono (plano) com a área de sua projeção ortogonal sobre um plano. No enunciado do teorema a seguir, usamos a notação  $A(F)$  para indicar a área de uma figura plana  $F$ .

**Teorema 13.** *Seja  $P$  um polígono contido em um plano  $\beta$  e  $P'$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre um plano  $\alpha$ . Se  $\theta$  é a medida do ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$ , então*

$$A(P') = A(P) \cdot \cos \theta. \quad (2)$$

**Prova.** Inicialmente, se  $\theta = 90^\circ$ , então não há nada a fazer. Realmente, nesse caso temos que a projeção de  $P$  sobre  $\alpha$  degenera em um segmento de reta e  $\cos \theta = 0$ , de forma que os dois lados de (2) são iguais.

Suponha, pois, que  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ . Observe que  $P$  pode ser particionado como a união de triângulos  $T_1, \dots, T_k$ , de tal forma que

$$A(P) = A(T_1) + \dots + A(T_k).$$

Então,  $P'$  fica particionado como a união das projeções  $T'_1, \dots, T'_k$  de  $T_1, \dots, T_k$ , respectivamente, de modo que

$$A(P') = A(T'_1) + \dots + A(T'_k).$$

Portanto, se mostrarmos que (2) vale para triângulos, teremos

$$\begin{aligned} A(P') &= A(T'_1) + \dots + A(T'_k) \\ &= A(T_1) \cos \theta + \dots + A(T_k) \cos \theta \\ &= (A(T_1) + \dots + A(T_k)) \cos \theta \\ &= A(P) \cos \theta. \end{aligned}$$

Dessa forma, é suficiente demonstrar o resultado para triângulos.

Vamos, primeiramente, resolver o problema para o caso particular em que um dos lados do triângulo  $ABC$  é paralelo<sup>1</sup> ao plano  $\alpha$ , digamos  $AB \parallel \alpha$ . Seja  $\gamma$  o plano que passa por  $AB$  e é paralelo a  $\alpha$  (veja a figura 11).

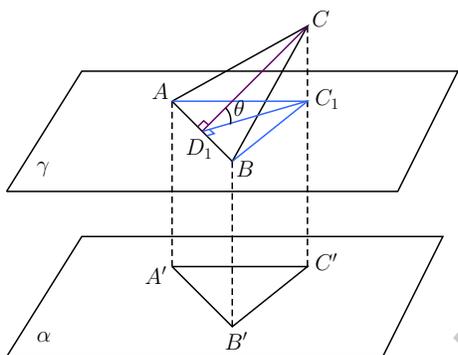


Figura 11: projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano paralelo a um de seus lados.

O Teorema 12 garante que  $ABC_1$  e  $A'B'C'$  são congruentes; em particular, eles têm a mesma área:  $A(ABC_1) = A(A'B'C')$ .

Tracemos a altura  $CD_1$  do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $AB$ . Pelo Teorema das Três Perpendiculares, o segmento  $C_1D_1$  também é perpendicular a  $AB$ . Então, a discussão sobre a medida de ângulos diedros garante que  $\widehat{CD_1C_1} = \theta$ , a medida do ângulo entre os planos  $\beta$  e  $\alpha$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} A(A'B'C') &= A(ABC_1) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{C_1D_1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD_1} \cdot \cos \theta \\ &= A(ABC) \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Vamos, agora, supor que nenhum dos lados do triângulo  $ABC$  é paralelo ao plano  $\alpha$ . Suponhamos ainda que, dos três vértices do triângulo  $ABC$ , o ponto mais próximo ao plano  $\alpha$  seja  $A$  (veja a figura 12).

<sup>1</sup>Ou seja, a reta suporte desse segmento é paralela ao plano  $\alpha$ .

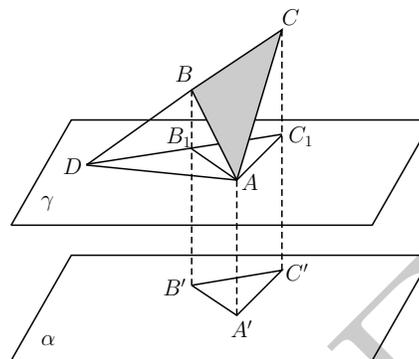


Figura 12: o caso geral da projeção ortogonal de um triângulo sobre um plano.

Seja  $\gamma$  o plano paralelo a  $\alpha$  e que passa por  $A$ . Sejam  $B_1$  e  $C_1$  as projeções ortogonais dos pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente, sobre o plano  $\gamma$  e sejam  $B'$  e  $C'$  as projeções ortogonais dos pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente, sobre o plano  $\alpha$ . Seja  $D$  o ponto onde a reta  $BC$  encontra o plano  $\gamma$ . Finalmente, seja  $A'$  a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o plano  $\alpha$ .

De acordo com o que já demonstramos, temos  $A(A'B'C') = A(AB_1C_1)$ ,  $A(AB_1D) = A(ABD) \cdot \cos \theta$  e  $A(AC_1D) = A(ACD) \cdot \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$  (ou, o que é o mesmo, entre os planos  $\beta$  e  $\gamma$ ). Assim,

$$\begin{aligned} A(A'B'C') &= A(AB_1C_1) \\ &= A(AC_1D) - A(AB_1D) \\ &= [A(ACD) - A(ABD)] \cdot \cos \theta \\ &= A(ABC) \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração.  $\square$

## Dicas para o Professor

A abordagem *axiomática* ou *Euclidiana* da geometria espacial exige mais tempo e dedicação do professor. Você pode optar por seguir esse texto ou por exibir os resultados sem as demonstrações, ou, ainda, por omitir algumas demonstrações que julgar mais elaboradas. Caso opte por seguir o texto à risca, deve estar preparado para dedicar um bom tempo a ele. Para sermos mais precisos, estimamos que sejam necessárias 4 ou 5 aulas de 50 minutos cada para cobrir todo esse material. Esse tempo pode aumentar ou diminuir conforme o rendimento da turma. Caso deseje omitir algumas, ou todas as demonstrações, o tempo necessário pode ser reduzido a, no máximo, 3 aulas de 50 minutos cada.

Um fato extremamente importante na abordagem Euclidiana da geometria espacial é que as figuras são meras representações dos objetos geométricos. De outra forma, embora a intuição geométrica nasça dos objetos físicos que nos rodeiam, as figuras geométricas que definimos e estudamos no texto não fazem, em princípio, parte do mundo físico: não encontramos retas ou planos em um passeio pelo parque. Esses objetos, então, existem apenas em nossa mente, e só os associamos a objetos do mundo físico que nos rodeia pela comodidade de construirmos *representações mentais* familiares para os mesmos.

Dessa forma, é interessante encarar a geometria como um *jogo*, onde os axiomas são as regras e as demonstrações são argumentações que só podem utilizar tais regras (ou seja, os axiomas) e aquilo que já foi demonstrado. Assim, o fato de que os teoremas da geometria refletem propriedades interessantes e úteis dos objetos físicos reais que nos circundam é secundário.

Esse modo peculiar de pensamento (axiomático, lógico e dedutivo) é uma herança da antiguidade clássica grega, talvez a maior que recebemos dela. Qual é a vantagem desse modo de pensamento? Longe de ser uma limitação, ele é uma libertação: não há necessidade de trabalharmos com representações concretas (esboços de figuras) para construirmos toda uma teoria geométrica. De outra forma, caso um determinado conjunto satisfaça os axiomas, ele também satisfará todos os resultados da teoria.

Mais informações sobre a abordagem axiomática da Geometria podem ser encontradas na sugestão de leitura complementar [2], p. 219.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. H.B. Griffiths, P.J. Hilton, *Matemática Clássica, uma interpretação contemporânea*, vol. 2, São Paulo, Editora Edgard Blücher/Ed. USP, 1975.