Material Teórico - Módulo de Função Logarítmica

Função logarítmica e propriedades - Parte 3

Primeiro Ano - Ensino Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta terceira parte, exibiremos uma abordagem das funções logarítmicas e exponenciais diferente daquela que desenvolvemos nas duas primeiras partes desta aula: apresentaremos primeiro a função logarítimica, dada como a área delimitada por um arco de hipérbole, e obteremos a função exponencial como sua inversa. Seguiremos a abordagem das sugestões de leitura complementar [1] e [3]. Longe de pensarmos em esgotar o assunto aqui, faremos apenas uma breve introdução, remetendo os leitores a essas referências para um maior detalhamento.

1 Área sob a hipérbole

Adotaremos a notação $\mathbb{R}^+$, dada na sugestão de leitura complementar 3, para o conjunto dos números reais positivos.

O gráfico da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{1}$$

é um dos ramos de uma *hipérbole equilátera* e tem o formato mostrado na Figura 1.

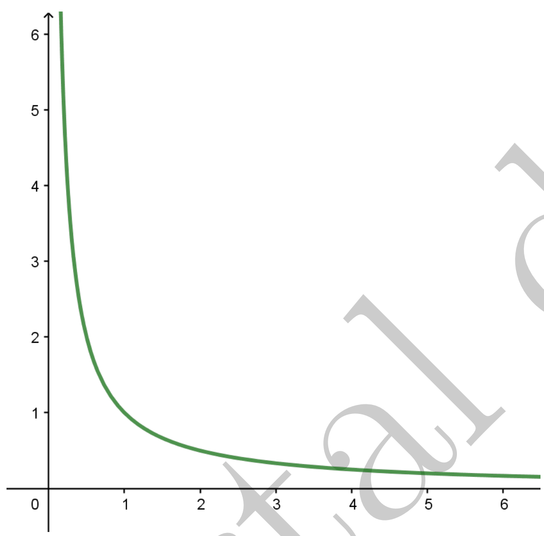

Figura 1: o gráfico da função dada por $f(x) = 1/x$, para $x > 0$.

Esse gráfico é o conjunto $H = \{(x, y) \mid x > 0, xy = 1\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, vamos chamar de **faixa de hipérbole** H_a^b a região do plano limitada pelo eixo das abscissas, pelo gráfico de f e pelas retas verticais que passam por a e por b, ou seja,

$$H_a^b = \left\{ (x, y) \mid a < x < b,\ 0 < y < \frac{1}{x} \right\}. \tag{2}$$

Veja a Figura 2.

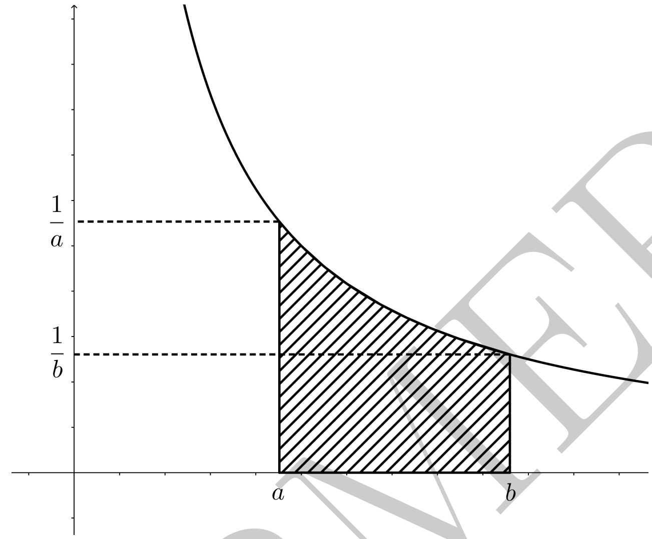

Figura 2: a faixa de hipérbole H_a^b.

A área de uma faixa de hipérbole H_a^b, que denotaremos por S_a^b, pode ser aproximada pela soma das áreas de retângulos vinculados ao gráfico da função $y = 1/x$, como explicaremos a seguir.

Para cada número natural n, marcamos no eixo das abscissas os $n+1$ números reais $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, tais que $x_0 = a$, $x_n = b$ e, para $1 \leq i \leq n$, o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. O conjunto $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ é chamado de uma **partição** (equiespaçada) do intervalo $[a, b]$.

A partição P_n do intervalo $[a, b]$ o divide em n intervalos de comprimento $\frac{b-a}{n}$. Nas Figuras 3 e 4, o intervalo $[a, b]$ é dividido em quatro partes iguais. Não é difícil verificar que o ponto x_i da partição P_n é dado por

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i. \tag{3}$$

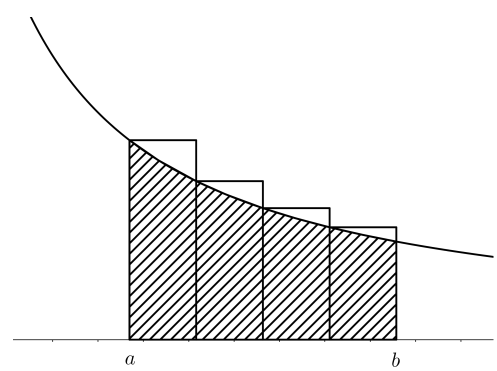

Figura 3: aproximação da área S_a^b por excesso.

Sobre cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, podemos construir dois retângulos com mesma base $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ e alturas distintas: $\frac{1}{x_{i-1}}$ e $\frac{1}{x_i}$. A soma das áreas dos retângulos com alturas maiores fornece uma aproximação $E_a^b(n)$ da área S_a^b *por excesso* (mostrada na Figura 3), ou seja, é um valor aproximado de S_a^b e maior do que esse número. Já a soma das áreas dos retângulos com alturas menores fornece uma aproximação $F_a^b(n)$ de S_a^b *por falta*, ou seja, um valor aproximado de S_a^b e menor do que esse número (veja a Figura 4).

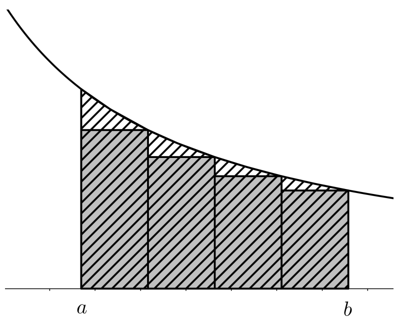

Figura 4: aproximação da área S_a^b por falta.

Além disso, para cada erro $\varepsilon > 0$, considerando n suficientemente grande podemos garantir que $E_a^b(n)$ e $F_a^b(n)$ aproximam S_a^b com erro menor que ϵ, isto é:

$$S_a^b - \varepsilon < F_a^b(n) < S_a^b < E_a^b(n) < S_a^b + \varepsilon. \quad (4)$$

Uma justificativa intuitiva para as desigualdades acima é que, ao aumentarmos o número n retângulos, cada um deles se torna mais fino, o que reduz os erros nas aproximações. Para maiores detalhes, veja, por exemplo, o capítulo 4 da sugestão de leitura complementar [3].

O resultado a seguir usa aproximações por falta e por excesso para mostrar que as áreas das faixas de hipérbole H_a^b e H_{ka}^{kb} (para $k > 0$) são iguais.

Teorema 1. *Se k é um número real positivo, então $S_{ka}^{kb} = S_a^b$.*

Prova. Primeiro, vamos comparar as áreas de retângulos de dois retângulos que estão abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$, como mostrado na Figura 5.

O retângulo cuja base é o intervalo $[a, b]$ e que tem altura $\frac{1}{b}$ tem área igual a $\frac{b-a}{b}$. Por outro lado, o retângulo cuja base é o intervalo $[ka, kb]$ e que tem altura $\frac{1}{kb}$ tem área $\frac{kb-ka}{kb} = \frac{b-a}{b}$. Logo, os dois retângulos têm a mesma área.

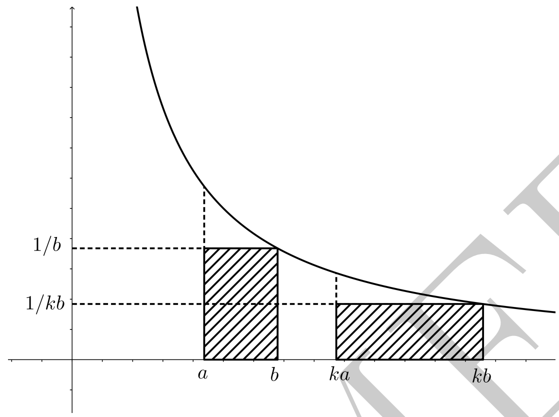

Figura 5: os retângulos abaixo do gráfico de $y = 1/x$ e acima dos intervalos $[a, b]$ e $[ka, kb]$, têm mesma área.

Consideremos, agora, duas faixas de hipérbole H_a^b e H_{ka}^{kb}, com áreas S_a^b e S_{ka}^{kb}. A partir de uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, podemos construir a partição $kP = \{kx_0, kx_1, \ldots, kx_{n-1}, kx_n\}$ do intervalo $[ka, kb]$.

Seja i um número natural, $1 \le i \le n$. O retângulo construído sobre o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e com altura $\frac{1}{x_i}$, tem área igual a $\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$. O retângulo construído sobre o intervalo $[kx_{i-1}, kx_i]$ e com altura $\frac{1}{kx_i}$ tem área igual a $\frac{kx_i - kx_{i-1}}{kx_i} = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$.

Dessa forma, é possível aproximar S_a^b e S_{ka}^{kb}, por falta, usando-se retângulos de mesma área (veja a Figura 6. O mesmo vale para aproximações por excesso. Como essas aproximações podem ser tornadas arbitrariamente precisas, desde que o número n de retângulos seja suficientemente grande, temos que S_a^b e S_{ka}^{kb} são, forçosamente, iguais.

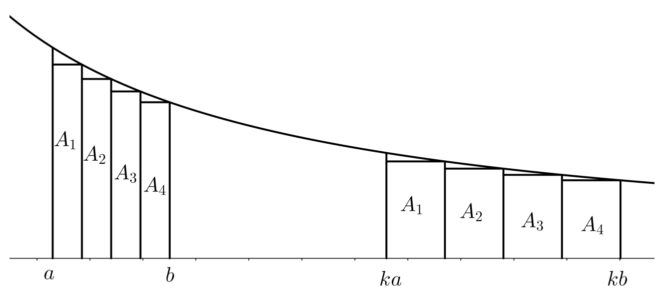

Figura 6: as áreas S_a^b e S_{ka}^{kb} podem ser aproximadas por retângulos de mesma área.

De fato, se S_a^b e S_{ka}^{kb} fossem diferentes, então um desses números seria maior do que o outro, digamos $S_a^b < S_{ka}^{kb}$.

Assim, poderíamos considerar o erro $\epsilon > 0$ dado por

$$\varepsilon = \frac{S_{ka}^{kb} - S_a^b}{2}. \quad (5)$$

A escolha de ϵ implica que $S_a^b + \varepsilon = S_{ka}^{kb} - \varepsilon$. Por (4), existe n natural suficientemente grande tal que

$$F_a^b(n) < S_a^b < S_a^b + \varepsilon = S_{ka}^{kb} - \varepsilon < F_{ka}^{kb}(n).$$

Mas isso é uma contradição, pois $F_a^b(n) = F_{ka}^{kb}(n)$, já que os retângulos que compõem essas regiões têm as mesmas áreas.

Então, não podemos ter $S_a^b < S_{ka}^{kb}$ e, da mesma forma, não podemos ter $S_a^b > S_{ka}^{kb}$. Logo, $S_a^b = S_{ka}^{kb}$. $\square$

Uma consequência do Teorema 1 é que, tomando $k = \frac{1}{a}$, temos

$$S_a^b = S_{ka}^{kb} = S_1^c, \quad (6)$$

onde $c = \frac{b}{a}$. Isso significa que, para calcularmos áreas de faixas de hipérbole, é suficiente considerarmos faixas de hipérbole começando na reta vertical $x = 1$.

Se $a < b < c$, temos a situação ilustrada na Figura 7 e, neste caso, é evidente que

$$S_a^b + S_b^c = S_a^c. \quad (7)$$

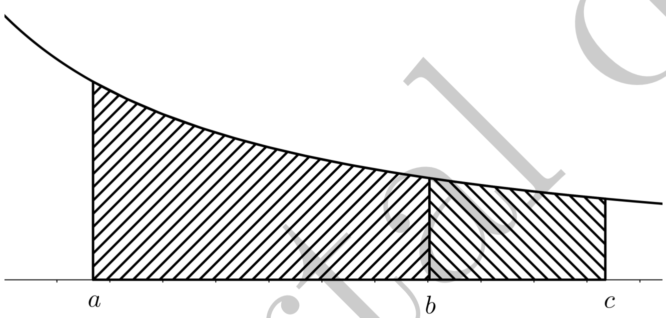

Figura 7: as faixas H_a^b e H_b^c, justapostas, geram a faixa H_a^c.

Para que a igualdade (7) contiue válida, mesmo que não ocorram as desigualdades $a < b < c$, devemos adotar as seguintes convenções: $S_a^a = 0$ e $S_b^a = -S_a^b$.

Assim, por exemplo, se $a < c < b$, temos, por comparação de áreas, que $S_a^c + S_c^b = S_a^b$, logo, $S_a^b - S_c^b = S_a^c$. Como $S_c^b = -S_b^c$, segue a igualdade (7). O mesmo procedimento pode ser feito para os outros casos.

2 Função logarítmica como área

Nesta seção, construiremos uma função $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições:

(1) L é crescente;

(2) $L(xy) = L(x) + L(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Definimos $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo

$$L(x) = S_1^x. \quad (8)$$

Vamos mostrar que a função dada em (8) satisfaz as condições (1) e (2).

Primeiro, vamos mostrar que vale (2). De fato, por (7), temos

$$L(xy) = S_1^{xy} = S_1^x + S_x^{xy}.$$

Por outro lado, segue do Teorema 1 que $S_x^{xy} = S_1^y$. Assim,

$$L(xy) = S_1^x + S_1^y = L(x) + L(y).$$

Agora vamos mostrar que L é crescente. Para isso, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^+$ com $x < y$. Então $y = x \cdot \frac{y}{x}$, com $\frac{y}{x} > 1$. Então $L\left(\frac{y}{x}\right) = S_1^{y/x} > 0$ e

$$L(y) = L\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{y}{x}\right) > L(x).$$

A função L, dada em (8) é chamada **função logaritmo natural** e é denotada por $L(x) = \ln x$ ou $L(x) = \log x$.

Algumas consequências imediatas da definição de logaritmo natural e das considerações que fizemos sobre S_a^b são as seguintes:

(I) Se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0$ e, se $1 < x$, então $\ln x > 0$. De fato, se $x > 1$, $\ln x = S_1^x > 0$, pois é a área da faixa sob a hipérbole equilátera de 1 a x. Se $0 < x < 1$, então $\ln x = S_1^x = -S_x^1 < 0$, pois S_x^1 é a área sob a hipérbole equilátera, de x a 1.

(II) $\ln 1 = S_1^1 = 0$.

Outra observação importante é a seguinte.

Observação 2. *Uma função L que satisfaz as condições (1) e (2) é sobrejetiva.*

Remetemos o leitor às sugestões de leitura complementar [1] ou [3] para uma demonstração de que L é sobrejetiva.

Como L é crescente, ela é também injetiva, logo, L é uma bijeção. Em particular, existe um único número real e tal que $\ln(e) = 1$. Esse número é, aproximadamente,

$$e \cong 2,718281828459045,$$

e é um número irracional, de importância fundamental na Matemática. O leitor pode encontrar mais informações sobre o número "e" em um livro que foi dedicado a ele: a sugestão de leitura complementar [4].

Outra consequência da bijetividade de L é que essa função admite uma inversa $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Como $L(xy) = L(x) + L(y)$, se $L(x) = a$ e $L(y) = b$, então $x = E(a)$ e $y = E(b)$. Assim, $L(xy) = a + b$, ou seja, $xy = E(a + b)$, o que é equivalente a $E(a + b) = E(a)E(b)$. Esta é a propriedade fundamental das funções exponenciais (veja a aula *Função Exponencial e Propriedades*). Repetindo o que foi feito naquela aula, chegamos à conclusão que $E(t) = e^t$, para qualquer t real.

2.1 Outras bases

Seja k um número real positivo. Podemos repetir o que fizemos com as faixas de hipérbole H_a^b, situadas sob a hipérbole equilátera, e construir faixas sob o gráfico da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{k}{x}$. Seguindo a notação da sugestão de leitura [3], vamos escrever $H_a^b(k)$ para a faixa sob a hipérbole entre $x = a$ e $x = b$. Usaremos $S_a^b(k)$ para indicar a área da faixa $H_a^b(k)$.

Como cada retângulo sob o gráfico de $f(x) = \frac{k}{x}$ pode ser obtido a partir de um retângulo sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ multiplicando-se sua altura por k. A área $S_a^b(k)$, podendo ser arbitrariamente aproximada pela soma das áreas desses retângulos, é igual a $k \cdot S_a^b$. Dessa forma, as propriedades de S_a^b se repetem para $S_a^b(k)$.

Se $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, é dada por $L(x) = S_1^x(k) = k \cdot S_1^x = k \cdot \ln x$, então L é uma função que satisfaz as condições (1) e (2) exibidas no início desta seção. Essa função L também é bijetiva, logo existe um único $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, tal que $L(a) = 1$. Da igualdade $L(x) = k \cdot \ln x$, segue que $1 = L((a) = k \cdot \ln a$, ou seja, $k = \frac{1}{\ln a}$. Como estamos supondo que k é positivo, temos que $\ln a > 0$, logo $a > 1$.

O número real a é chamado **base** da função logarítmica L e denotamos $L(x) = \log_a x$. Pelo que vimos acima,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

No caso em que $k < 0$, as considerações feitas acima podem ser repetidas, com a única diferença que as "áreas" consideradas, neste caso, têm sinal negativo. Como $\ln a = \frac{1}{k}$, temos que, neste caso, $0 < a < 1$ e a função $L(x) = \log_a x$ é decrescente, como já vimos na parte 2 desta aula.

Desssa forma, todas as funções logarítmicas podem ser obtidas a partir da função *natural* $\ln x$.

Dicas para o Professor

A presente aula pode ser coberta em dois encontros de 50 minutos.

Com esta terceira parte, encerramos nossa aula introdutória sobre logaritmos e funções logarítmicas. Esta parte três deve ser encarada como um convite à leitura das sugestões a seguir, que expandem e aprofundam o assunto.

As vantagens da introdução da função logarítmica por meio de áreas são delineadas na introdução da referência [3]. Nesta referência, assim como na sugestão de leitura [2], o tratamento é elementar, sem uso explícito do cálculo. Nas sugestões [1] e 5, o tratamento é mais formal, usando a noção de integral. A sugestão [4] é um livro de divulgação bastante interessante, que conta a história do número "e" e das pessoas que o estudaram.

Tentamos explicar, neste pequeno texto, apenas aquilo que julgamos ser o essencial nessa abordagem, ou seja, que uma função logarítmica pode ser definida como "área" sob a hipérbole. Acreditamos que, se você conseguir apresentar essa ligação aos seus estudantes, eles terão um bom exemplo de uma conexão inesperada entre partes distintas da Matemática.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matematica Elementar*, vol. 3, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. A.I. Markushevich, *Areas y Logaritmos*, Lecciones Populares de Matemáticas, Ed. Mir, Moscou, 1975.
3. E. L. Lima. *Logaritmos.* SBM, Rio de Janeiro, 1991.
4. Eli Maor. *e: a história de um número*, Ed. Record, Rio de Janeiro, 2005.
5. Peter Lax, et. al. *Cálculo, Aplicações e Programação*, vol.1, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979.