Material Teórico - Módulo de MATEMÁTICA FINANCEIRA

Introdução: Porcentagem, Aumentos e Descontos

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula inicial, apresentaremos alguns conceitos fundamentais para compreender as situações que envolvem questões de Matemática Financeira: o valor do dinheiro no tempo, as porcentagens, o fluxo de caixa e os termos mais técnicos mais utilizados na área.

2 O valor do dinheiro no tempo

Imagine que Josimar tem um violão que já não usa há muito tempo. Por conta disso, ele resolve vendê-lo para arrecadar um dinheiro para comprar algo que está desejando muito no momento: uma coleção de livros do escritor *Machado de Assis*. Esta coleção está custando R$ 100,00 e Josimar decide pôr seu violão a venda pelo mesmo preço. Ele também fica sabendo que seu amigo Paulo está disposto a comprar seu violão, pois fará uma apresentação em um show de talentos em breve, mas que só terá o dinheiro para comprá-lo no próximo mês. Para resolver este impasse, Josimar permite que seu amigo leve seu violão, mas que só o pague no próximo mês, desde que Paulo pague a ele **juros** de 10%. Ou seja, Paulo deverá pagar, ao todo, R$ 110,00.

Na situação descrita acima, os juros representam o valor do dinheiro no tempo. Enquanto Paulo poderá desfrutar do violão imediatamente, Josimar terá que esperar um mês para comprar e ler as obras de Machado de Assis. Assim, os dez reais de juros são uma forma "compensar" Josimar pela espera. Usando uma linguagem mais técnica, podemos interpretar os juros como um **custo de oportunidade**. Porém, esta não é o único fator que justifica a existência dos juros. Podemos listar, ainda, os dois fatores a seguir:

- **Risco:** quando Paulo se compromete a pagar apenas no mês seguinte, existe a possibilidade dele não conseguir dinheiro suficiente para pagar Josimar. E isso pode ocorrer por diversos fatores. Por exemplo, Paulo pode perder o emprego ou sofrer um acidente que lhe gere altos custos hospitalares.

- **Preferências intertemporais:** imagine que você tenha preferência por determinada tipo de fruta, em detrimento de outra. Por exemplo, você gosta mais de caqui do que de maçã. É natural pensar que você estaria disposto a pagar um pouco mais por um quilo de caqui do que por um quilo de maçã. Isso ocorre pois você dá um valor maior ao caqui. O mesmo ocorre com valores monetários em datas distintas. É comum que os seres humanos dêem mais valor a cem reais hoje do que daqui a um ano.

De maneira resumida, em nossa sociedade aceita-se consensualmente a ideia de que o dinheiro muda de valor com o passar do tempo. Dessa forma, **não é possível somar dois valores monetários que correspondam a datas distintas**. Portanto, da mesma forma que não podemos somar determinada quantia em reais com outra em dólares sem que haja uma conversão utilizando uma taxa de câmbio, também não podemos somar valores monetários (ainda que expressos na mesma moeda) que sejam relativos a recebimentos em períodos diferentes sem utilizar uma **taxa de desconto**[1].

3 Porcentagem

Muitas questões que tratam sobre Matemática Financeira envolvem porcentagens. O objetivo desta seção é relembrar este importante conceito. Lembre-se de que as porcentagens podem ser entendidas como frações com **denominador igual a 100**. Além disso, o símbolo de **porcentagem** (%), pode ser pensado como representando a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

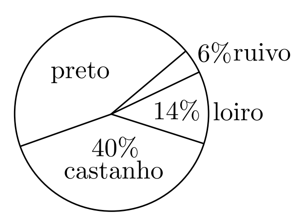
$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%;$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%;$$

$$1 = \frac{100}{100} = 100\%.$$

Graças à última igualdade acima, dizemos que o número 1 representa uma determinada **totalidade**.

Exercício 1. *Uma pesquisa levantou as cores de cabelo de* 1200 *pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir: Pergunta-se: quantas pessoas entrevistadas possuem cabelo preto?*



Solução. Para resolver este exercício, observe que 100% representa a totalidade de pessoas entrevistadas, i.e, 1200 pessoas. Então, uma vez que

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%,$$

concluímos que o porcentual de pessoas com cabelo preto é

$$100\% - 60\% = 1 - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

[1] Aprenderemos mais sobre esse conceito na aula sobre sistemas de financiamento. Veremos que, de maneira geral, se i é a taxa de juros, a taxa de desconto é $\delta = \frac{1}{1+i}$.

ou seja, 40% de uma totalidade de 1200 pessoas. Consequentemente,

$$\frac{40}{100} \times 1200 = 480$$

das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto. $\square$

Um diagrama circular como o apresentado no enunciado do exercício anterior, no qual várias porcentagens estão representadas por *setores circulares* de *aberturas* proporcionais às mesmas, é conhecido como um **gráfico de pizza** ou, ainda, um **gráfico de setores**. Uma grande vantagem de gráficos de pizza reside no fato de que eles transmitem rapidamente uma ideia das porcentagens envolvidas.

Lembre-se de que a porcentagem é uma medida *relativa* e não *absoluta*. Portanto, ela deve ser sempre interpretada como parte de uma totalidade. Consequentemente, o aluno deve manter-se ainda mais atento em problemas nos quais porcentagens diferentes representam diferentes totalidades, como é o caso das situações descritas nos exercícios a seguir.

Exercício 2. *Em agosto de* 2006*, Josué gastava* 20% *de seu salário no pagamento do aluguel de sua casa. A partir de setembro de* 2006*, ele teve um aumento de* 8% *em seu salário e o aluguel de sua casa foi reajustado em* 35%*. Nessas condições, para o pagamento do aluguel após os reajustes, qual porcentagem do salário Josué deverá desembolsar mensalmente?*

Solução. Digamos que o salário de Josué seja x. Neste caso, o gasto inicial com o aluguel é de $\frac{20}{100}x = \frac{x}{5}$.

Por outro lado, após o aumento de salário, Josué passará a receber

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)x = \frac{108}{100}x = 1,08x.$$

Por sua vez, com o aumento, o aluguel passará a custar

$$\left(1 + \frac{35}{100}\right)\frac{x}{5} = \frac{135}{100} \cdot \frac{x}{5} = \frac{27}{100}x = 0,27x.$$

Queremos, então, calcular quanto o novo valor do aluguel $(0,27x)$ representa, porcentualmente, do novo salário de Josué $(1,08x)$. Para isso, precisamos expressar a fração $\frac{0,27x}{1,08x}$ como porcentagem, o que é bastante simples:

$$\frac{0,27x}{1,08x} = \frac{0,27}{1,08} = \frac{27}{108} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

$\square$

Exercício 3 (FGV). *João divide suas economias e as aplica em dois fundos de investimento: A e B. No primeiro mês, o fundo A rendeu* 50% *e o fundo B,* 30%*. No segundo mês, ambos os fundos renderam* 20%*. Se a rentabilidade que João obteve no bimestre foi de* 63,2%*, que porcentagem de suas economias foi aplicada no fundo B?*

Solução. Suponhamos que João tem um total de 100 unidades monetárias para investir, sendo x delas investidas no fundo A e as $100 - x$ restantes no fundo B. Ao final do primeiro mês, o fundo A estará com

$$x + 50\%x = 1,5x$$

e o fundo B estará com

$$(100 - x) + 30\%(100 - x) = 1,3 \cdot (100 - x).$$

Portanto, ao final deste primeiro mês João terá

$$1,5x + 130 - 1,3x = 130 + 0,2x.$$

No segundo mês, ambos os fundos renderam 20%. Assim, não precisamos nos preocupar em separar os valores investidos em cada fundo para calcular os rendimentos separadamente. Então, ao final do bimestre, João terá

$$(1 + 20\%)(130 + 0,2x) = 156 + 0,24x.$$

Sabemos que esse valor corresponde a uma rentabilidade de 63,2% sobre o valor inicial de 100 unidades monetárias. Logo, obtemos a seguinte equação:

$$156 + 0,24x = (1 + 63,2\%) \cdot 100 = 1,632 \cdot 100 = 163,2,$$

de modo que $0,24x = 7,2$ e, assim, $x = 30$.

Portanto, de cada 100 unidades monetárias investidas, João colocou 30 no fundo A. Isso é o mesmo que dizer que João investiu, neste primeiro fundo, 30% de suas economias. $\square$

Exercício 4. *Carla investiu nas ações da empresa OMGX parte do que tinha guardado, deixando o restante em sua conta corrente. No primeiro mês, as ações da empresa perderam* 40% *do seu valor. Qual deve ser o aumento porcentual no preço das ações, no segundo mês, para que Carla volte a ter a mesma quantidade de dinheiro que tinha inicialmente?*

Solução. Seja x o preço inicial de cada ação. Ao perder 40% do seu valor no primeiro mês, a ação passa a custar

$$(1 - 0,4)x = 0,6x.$$

Para que Carla volte a ter a mesma quantidade de dinheiro que possuía inicialmente, cada ação deve voltar a custar x. Para tanto, seu preço atual $(0,6x)$ deve ter uma taxa de crescimento r tal que

$$(1 + r)0,6x = x.$$

Resolvendo esta equação, obtemos sucessivamente

$$1 + r = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6};$$

$$r = \frac{10}{6} - 1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cong 0,66.$$

Portanto, para que Carla volte a ter a mesma quantidade de dinheiro que possuía inicialmente, as ações da OMGK devem ter um aumento de aproximadamente 66% no segundo mês. □

Como lição geral a ser guardada a partir dos exemplos acima, observe que, para se evitar erros, descontos ou acréscimos sempre devem ser considerados como operações de multiplicação.

4 Alguns termos técnicos

Nessa seção iremos apresentar alguns termos técnicos que serão utilizados ao longo deste módulo.

Ao colocarmos algum dinheiro em uma aplicação financeira, esse dinheiro irá *capitalizar-se*, ou seja, irá ser multiplicado por um determinado valor a cada período previamente determinado. O valor aplicado inicialmente será chamado de **capital inicial** ou **valor presente**, sendo representado pela letra C ou pela sigla VP. Ao final do período de aplicação, resgatamos o capital inicial mais os juros (representados pela letra J) do período. Esse valor é chamado de **montante** ou **valor futuro**, sendo representado pela letra M ou pela sigla VF_n, onde n indica o número de períodos (de capitalização) durante os quais o dinheiro ficou aplicado. Portanto, podemos considerar a seguinte igualdade *tautológica*[2]:

$$M = C + J.$$

4.1 Fluxo de caixa

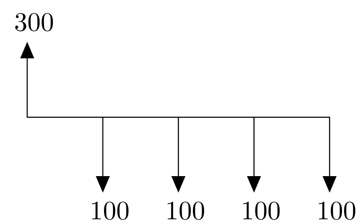
Da discussão apresentada na primeira seção, concluímos que ter $100,00$ hoje não é o mesmo que ter $100,00$ reais daqui a um ano. Dessa forma, em projetos financeiros que envolvam transações monetárias em dois ou mais períodos distintos, é importante considerarmos um diagrama que facilite a visão geral sobre todas essas movimentações financeiras antes de avaliarmos globalmente o projeto. A forma mais difundida de fazermos isso é através do *diagrama de fluxo de caixa*.

O **diagrama de fluxo de caixa** é uma figura que representa graficamente as movimentações financeiras ao longo do tempo, relativamente a um determinado projeto financeiro. O tempo é representado por um segmento disposto na horizontal, dividido em partes iguais, correspondentes ao número de períodos relevantes para análise (i.e., até o último período que representa uma movimentação não-nula). Por sua vez, a evolução desses períodos deve ser observado da esquerda para a direita (como ocorre com a representação padrão do eixo horizontal de um sistema cartesiano). As *entradas* (ou *recebimentos*) são representadas por setas verticais apontando para cima, enquanto que as *saídas* (ou *pagamentos*) são representadas por setas verticais apontando para baixo. Cada movimentação financeira será chamada simplesmente de **fluxo de caixa**.

[2]Isto é, trivialmente verdadeira.

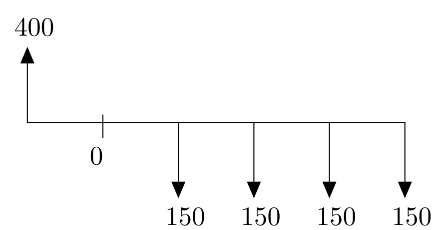
Apenas reforçando: a primeira seta corresponde ao fluxo de caixa do período $t = 0$ (ou seja, o momento presente). As demais setas representam os fluxos de caixa dos demais períodos $t = 1, 2, 3, \ldots$. Além disso, a variação de tempo entre dois fluxos de caixa deve ser constante ao longo de todo o diagrama.

Exemplo 5. *Suponha que Mariana tomou um empréstimo de uma amiga, recebendo* R\$ $300,00$ *no dia primeiro de janeiro. Ela se comprometeu a pagar esta dívida em quatro parcelas de* R\$ $100,00$ *cada, sempre no primeiro dia de cada um dos meses de fevereiro, março, abril e maio. Para Mariana, o fluxo de caixa desse acordo financeiro é o seguinte:*



Realmente, a primeira seta representa o recebimento de R\$ $300,00$ no mês de janeiro, e por isso está desenhada para cima. As demais setas estão desenhadas para baixo, pois representam saídas de dinheiro.

Exemplo 6. *Joana tomou um empréstimo, recebendo* R\$ $400,00$ *no dia primeiro de janeiro. Ela deve pagar esta dívida em quatro parcelas de* R\$ $150,00$ *cada, sempre no primeiro dia dos meses de março, abril, maio e junho. Ou seja, esse empréstimo foi realizado com um mês de* carência*. O fluxo de caixa desse acordo financeiro é o seguinte:*



Veja que a carência dada à Joana corresponde a uma marcação "neutra" na linha do tempo do diagrama. Isso é necessário para que cada período esteja representado na figura, evitando ambiguidades.

5 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para abordar os assuntos deste material. Na primeira aula, relembre o conceito de porcentagem e resolva alguns exercícios. Aproveite para verificar a habilidade dos alunos em resolver expressões algébricas que envolvam multiplicação e adição de frações. No segundo encontro, introduza o conceito de juros e priorize os exercícios envolvendo aumentos e descontos sucessivos. É importante que os alunos fixem bem a ideia de que estes não devem ser somados, e sim multiplicados.

Ao final da aula, solicite aos alunos que comentem sobre situações reais nas quais eles se depararam com uma aplicação dos assuntos abordados neste material. Se possível, elabore exercícios que simulem as situações apresentadas pelos alunos.