Material Teórico - Módulo Cônicas

Parábolas

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Introdução

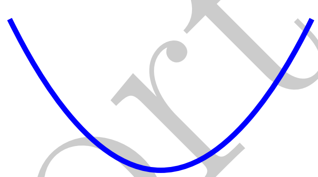
Nesta aula vamos revisar o conceito de parábola, que havíamos apresentado no módulo Função Quadrática, do primeiro ano do Ensino Médio. De fato, o cerne desta aula é semelhante ao que fizemos anteriormente, de forma que iremos apenas reapresentar aquele conteúdo no contexto das demais cônicas.

Conforme vimos na primeira aula deste módulo, parábolas são as curvas planas obtidas como seções de um cone por planos que são paralelos a um geratriz do cone (e que não passam pelo vértice nem contêm a geratriz do cone). Por outro lado, no módulo sobre os gráficos de funções quadráticas, vimos que um tal gráfico é formado exatamente pelos pontos que equidistam de uma reta (a *diretriz*) e um ponto (o *foco*). Aqui, vamos apresentar parábolas dessa última forma, observando que essas duas definições, aparentemente distintas, são de fato equivalentes (a esse respeito, veja a Seção *Dicas para o Professor*). Então, recapitulando, temos:

> A **parábola** de **foco** F e **diretriz** r é o conjunto dos pontos do plano que passa por r e F, tais que sua distância para F é igual à sua distância para r.

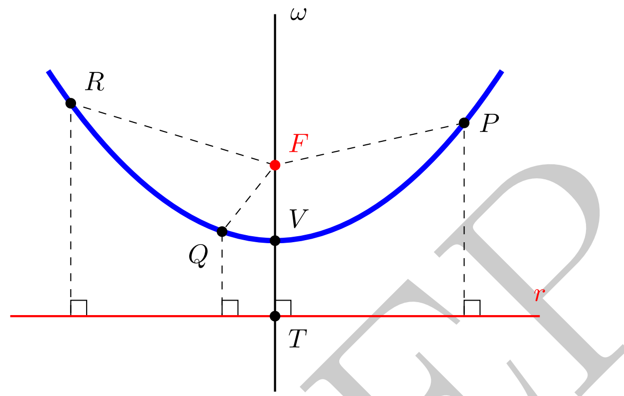
É interessante comparar a definição acima com as definições de círculo e elipse, vistas em aulas anteriores, e com a de hipérbole, que será vista na aula seguinte.

A figura abaixo mostra o icônico formato de um arco de parábola. Uma parábola possui comprimento infinito, por isso o que desenhamos aqui é apenas um pedaço (um *arco*) dela. A vídeo-aula do módulo sobre gráficos de funções quadráticas do primeiro ano mostra uma animação exibindo como a parábola é gerada a partir de F e r, e como ela muda ao variarmos as posições de r e F.



Na figura a seguir, temos uma parábola com vários outros elementos destacados, dentre eles seu foco F e sua diretriz r. Marcamos também alguns pontos, P, Q, R e V pertencentes à parábola, juntamente com os segmentos que determinam a distância de cada um deles para F e para a diretriz. Veja que, para cada ponto, os dois segmentos que partem dele possuem um mesmo comprimento, mas este comprimento pode ser diferente de um ponto para outro.

Temos, ainda, o **eixo** (**de simetria**) ω (aqui representado pela letra grega *ômega*), que é a reta perpendicular a r e que passa por F. Veja que ω funciona como um "espelho" para os pontos da parábola.



Por fim, veja que o ponto V na figura é bastante especial; ele é o ponto de interseção do eixo de simetria ω com a parábola, e é chamado de **vértice da parábola**. Como V pertence à parábola, também vale que a distância entre V e F é igual à distância entre V e a diretriz. Dessa forma, se chamarmos de T o ponto de interseção entre ω e r, temos que V será o ponto médio do segmento FT.

É importante observar que, conhecendo apenas o foco e o vértice, já podemos desenhar a parábola. Realmente, a partir destes elementos podemos facilmente encontrar o eixo e a diretriz: o eixo é a reta que passa por F e V, e a diretriz é a reta perpendicular ao eixo e passando pelo ponto T de ω, tal que $\overline{TV} = \overline{VF}$.

Aplicações práticas para a parábola são encontradas em diversas áreas da Engenharia, como no projeto de antenas parabólicas, radares e faróis de automóveis. Basicamente, isso se deve ao fato de que todo *espelho parabólico* concentra em seu foco um feixe de raios de luz (ou outras ondas eletromagnéticas) paralelos a seu eixo. Outro exemplo relevante, desta feita oriundo da Física, é a trajetória (parabólica) descrita por uma bala de canhão ao ser lançada, de acordo com sua direção e velocidade iniciais, considerando o efeito da força de gravidade mas desprezando os efeitos da resistência do ar e da curvatura da Terra. Mas, estes são assuntos para outras estórias.

1.1 A equação de uma parábola

Vamos obter a equação de uma parábola no plano cartesiano xOy, considerando apenas o caso em que a diretriz é paralela a um dos eixos cartesianos. Esta equação será dada em função das coordenadas do vértice e da distância entre o foco e o vértice, que será denotada por p e chamado de **parâmetro** da parábola.

Suponhamos, inicialmente, que a diretriz é paralela ao eixo-x. O caso mais simples de ser tratado é aquele em que o vértice V da parábola é o ponto $(0,0)$. Vejamos primeiro como fica a equação neste caso, para depois resolvermos o caso geral.

Neste caso o eixo-y do plano cartesiano será também o eixo de simetria da parábola (uma vez que o eixo da parábola passa por V e é perpendicular à diretriz). Sendo assim, o foco possui coordenadas $F = (0, p)$, para algum número real $p \neq 0$. Ademais, como a distância de V até F é igual à distância de V até a diretriz, segue que a diretriz é a reta de equação $y = -p$.

Considere, agora, um ponto $Q = (x, y)$ qualquer dessa parábola. Temos que o comprimento de $\overline{QF}$ é igual à distância de Q até a diretriz. A figura abaixo mostra o que temos até o presente momento (considerando os casos em que $p > 0$ e $p < 0$).

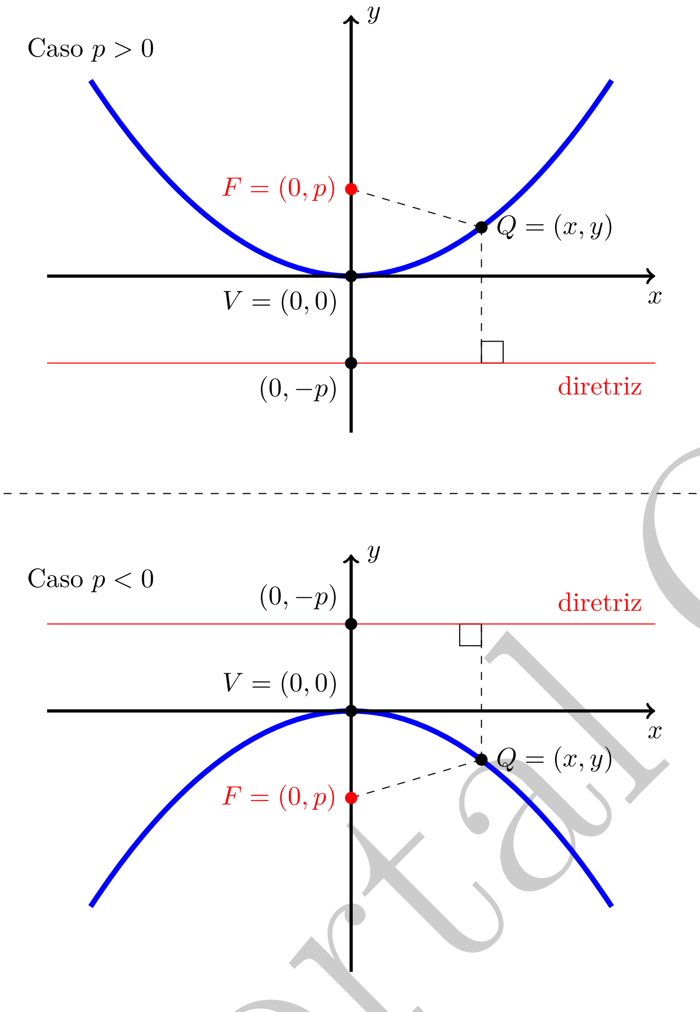


Figura 1: parábolas com foco $F = (0, p)$, para $p > 0$ (acima) e $p < 0$ (abaixo).

Como aplicação simples do Teorema de Pitágoras (ou simplesmente usando a fórmula da distância entre dois pontos), temos que

$$\overline{QF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}. \tag{1}$$

Por outro lado, pela Figura 1, a distância entre o ponto Q e a diretriz é igual à soma da distância entre Q e o eixo-x com a distância entre o eixo-x e a diretriz. Independentemente de p ser positivo ou negativo, isso é igual a

$$\operatorname{dist}(Q, d) = |y + p|\,. \tag{2}$$

Igualando o que obtivemos em (1) e (2) e elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2.$$

Por sua vez, isso garante que

$$\begin{aligned} x^2 &= (y+p)^2 - (y-p)^2 \\ &= ((y+p) + (y-p))\,((y+p) - (y-p)) \\ &= (2y)(2p) \\ &= 4py. \end{aligned}$$

Sendo assim, a equação de uma parábola com vértice $V = (0, 0)$ e diretriz paralela ao eixo-x é da forma

$$y = \frac{x^2}{4p}, \tag{3}$$

onde p é um número real diferente de zero.

De forma análoga, no caso em que $V = (0, 0)$ e a diretriz é uma reta paralela ao eixo-y, temos que a equação será da forma

$$x = \frac{y^2}{4p}. \tag{4}$$

Suponha, agora, que queremos uma parábola com vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ (e diretriz paralela a um dos eixos cartesianos). De forma semelhante ao que fizemos com as elipses na aula anterior, essa parábola pode ser obtida por uma translação de uma parábola que possui vértice no ponto $(0, 0)$. Algebricamente, isso corresponde a uma *substituição de variáveis*, onde trocamos x por $x - x_0$ e y por $y - y_0$ na equações (3) e (4). Essa mudança faz com que o ponto (x_0, y_0) seja levado no ponto $(0, 0)$. De fato, enquanto o ponto $(0, 0)$ é uma solução das equações (3) e (4), agora é o ponto (x_0, y_0) que será solução das equações seguintes.

Quando a diretriz for paralela ao eixo-x a parábola terá uma equação da forma

$$y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{4p},$$

onde x e y são as variáveis e x_0, y_0, p são números tais $V = (x_0, y_0)$ e o foco tem coordenadas $F = (x_0, y_0 + p)$. Veja que a equação acima pode também ser reescrita isolando y e expandindo o produto notável $(x - x_0)^2$. Isso nos fornece:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x - x_0)^2}{4p} + y_0 \\ &= \frac{x^2 - 2x_0 x + x_0^2}{4p} + y_0 \\ &= \frac{x^2}{4p} - \left(\frac{x_0}{2p}\right) x + \left(\frac{x_0^2}{4p} + y_0\right) \\ &= ax^2 + bx + c, \end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{1}{4p}, \quad b = -\frac{x_0}{2p}, \quad c = \frac{x_0^2}{4p} + y_0.$$

De maneira análoga, quando a diretriz for paralela ao eixo-y, a equação da parábola terá a forma

$$x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{4p},$$

e teremos $V = (x_0, y_0)$ e $F = (x_0 + p, y_0)$. Dessa vez, a equação também poderia ser reescrita como: $x = ay^2 + by + c$, onde

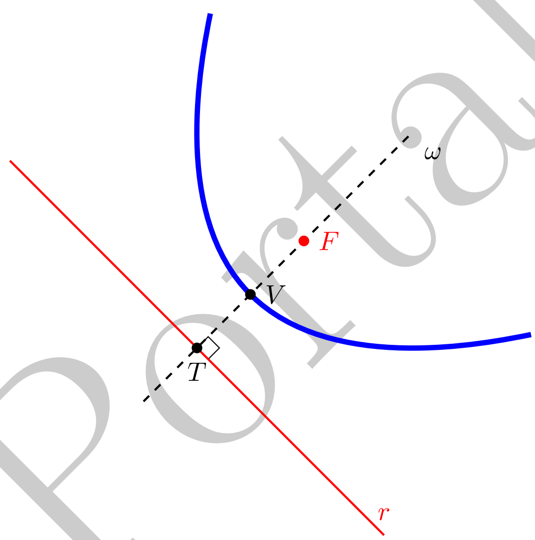
$$a = \frac{1}{4p}, \quad b = -\frac{y_0}{2p}, \quad c = \frac{y_0^2}{4p} + x_0.$$

2 Variando o foco e a diretriz

Nesta seção, vamos examinar o que acontece com a parábola ao variarmos a posição relativa entre o foco e a diretriz. Observe que a distância entre o foco e a diretriz é igual ao valor absoluto de $2p$.

2.1 Concavidade

A figura seguinte mostra uma parábola em que a diretriz não é paralela ao eixo-x nem ao eixo-y. Ao rotacionarmos a diretriz, a parábola rotaciona juntamente com ela. Mas, observe que o foco da parábola sempre se encontrará dentro da "boca" da mesma. Essa "boca" é o que chamamos de *concavidade*.



Observação 1. *Quando a diretriz não é paralela a um dos eixos cartesianos, a equação da parábola não terá a forma das equações* (3) *ou* (4). *Ela assumirá o formato mais geral*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A, B, \ldots, F$ são números reais e $B \neq 0$.

Por outro lado, ao variarmos os coeficientes $A, B, \ldots, F$ nem sempre obteremos uma parábola, mas sempre obteremos uma cônica (possivelmente degenerada), ou o conjunto vazio. Esse estudo geral não será feito nesta aula.

No caso em que a diretriz da parábola é paralela ao eixo-x, temos as duas possibilidades da Figura 2.

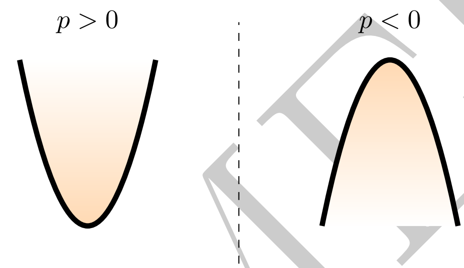


Figura 2: parábolas do tipo $y - y_0 = (x - x_0)^2/(4p)$.

De fato, quando a equação da parábola é da forma $y - y_0 = (x - x_0)^2/(4p)$, a diretriz é a reta horizontal $y = y_0 - p$, o vértice é o ponto (x_0, y_0) e o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$. Assim, quando $p > 0$ o foco está acima da diretriz e quando $p < 0$ ele está abaixo da diretriz. Veja também que, ao observamos a equação da parábola no formato $y = ax^2 + bx + c$, temos que o sinal de a é o igual ao de p, de forma que a direção da concavidade dependerá apenas do sinal de a.

No caso em que a diretriz é paralela ao eixo-y, temos as duas possibilidades da Figura 3.

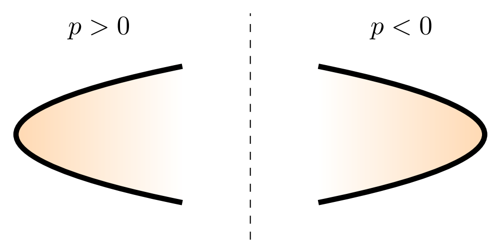


Figura 3: parábolas do tipo $x - x_0 = (y - y_0)^2/(4p)$.

Em resumo, as Figuras 2 e 3 nos mostram que:

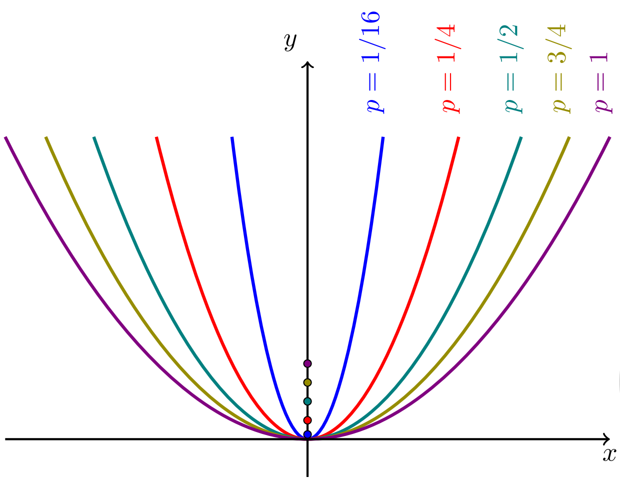
A parábola $y - y_0 = \frac{(x-x_0)^2}{4p}$ possui *concavidade voltada para cima* quando $\boldsymbol{p > 0}$, e possui *concavidade voltada para baixo* quando $\boldsymbol{p < 0}$.

A parábola $x - x_0 = \frac{(y-y_0)^2}{4p}$ possui *concavidade voltada para direita* quando $\boldsymbol{p > 0}$, e possui *concavidade voltada para esquerda* quando $\boldsymbol{p < 0}$.

2.2 Abertura

Por simplicidade, vamos tomar como exemplo as parábolas do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Como $a = 1/(4p)$, o valor $|a|$ é inversamente proporcional ao valor de $|p|$ e está ligado à *abertura da boca* da parábola. Quanto mais próximo o foco estiver do vértice, menor será $|p|$, maior será $|a|$ e menor será a abertura: a parábola será mais *fechada*, pois irá crescer mais rapidamente, ou seja, de forma mais acentuada/inclinada.

Exemplo 2. *A figura abaixo mostra os gráficos das funções do tipo $y = x^2/(4p)$, para alguns valores de p. Observe as posições correspondentes aos focos dessas parábolas ao longo do eixo−y.*



3 Exercícios

Exemplo 3. *Obtenha os principais elementos (foco, diretriz, eixo, parâmetro e vértice) da parábola $y = 4x^2 - 24x + 37$*

Solução. A fim de deixar essa equação no formato da equação (3), vamos usar a técnica de completar quadrados. Para tanto, reescrevemos a equação original como:

$$y = (4x^2 - 24x + 36) - 36 + 37$$

ou, ainda,

$$y = (2x - 6)^2 + 1.$$

Isso equivale a

$$y - 1 = (2(x - 3))^2,$$

isto é, a

$$y - 1 = 4 \cdot (x - 3)^2.$$

Então, temos uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo-x (é uma reta horizontal). Comparando a expressão acima com a equação (3), temos que o vértice é o ponto $V = (x_0, y_0) = (3, 1)$. Por outro lado, temos que $1/(4p) = 4$, logo, $p = 1/16$. Para obtermos as coordenadas do foco, basta somarmos o valor de p à coordenada y de V (já que a diretriz é horizontal). Obtemos, então, $F = (3, 1 + 1/16) = (3, 17/16)$. Por fim, a diretriz é a reta horizontal que passa pelo ponto $(3, 1 - 1/16) = (3, 15/16)$, ou seja, a reta de equação $y = 15/16$, e o eixo é a reta vertical que passa pelo ponto foco, isto é, é a reta de equação $x = 3$. □

Dicas para o Professor

Este material pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos, com amplo tempo disponibilizado para resolução de exercícios. Estes podem ser encontrados no próprio Portal, assim como nas referências listadas abaixo.

Assim como na aula anterior, não é estritamente necessário provar que toda parábola, conforme definida neste material, é uma seção cônica. Mas este é um ponto interessante e, havendo tempo, pode ser feito de forma semelhante ao que é feito com a elipse na referência [1]. Isso pode ser objeto de um terceiro encontro.

Lembramos que esta série de aulas tem como pré-requisito o conhecimento de sistemas de coordenadas cartesianas no plano, incluindo a fórmula para calcular a distância entre dois pontos, conforme estudado no início do módulo "Geometria Analítica", do terceiro ano do Ensino Médio.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria.* Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 7: Geometria analítica.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.