Material Teórico - Módulo de Divisibilidade

MDC e MMC - Parte 1

Sexto Ano

Prof. Angelo Papa Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Máximo divisor comum

Nesta aula, definiremos e estudaremos métodos para calcular o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números naturais, bem como algumas de suas propriedades. Vamos começar estudando o máximo divisor comum.

Consideremos os números naturais $a_1, \ldots, a_m$, e suponhamos que esses números não sejam todos nulos, ou seja, que há, dentre eles, pelo menos um que seja diferente de zero. O **máximo divisor comum (MDC)** dos números naturais $a_1, \ldots, a_m$ é o maior número natural d que divide todos esses números. (Veja que sempre há pelo menos um número natural que divide todos os números a_1, a_2, $\ldots$, a_m: o número natural 1, por exemplo.)

Exigir que d seja máximo significa que, se g é um número natural que também divide todos os números $a_1, \ldots, a_m$, então $g \leq d$. Se g também for máximo, então $g \leq d$ e $d \leq g$, ou seja, $g = d$. Logo, existe um único MDC de $a_1, \ldots, a_m$, que é denotado por $\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_m)$.

Como já vimos na aula 4, se n é um número natural não nulo, o conjunto $D(n)$, formado pelos números naturais que dividem n, é finito.

Se $a_1, \ldots, a_m$ são números naturais não todos nulos, então os elementos do conjunto $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)$ são os divisores comuns de $a_1, \ldots, a_m$. Em particular,

$$\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_m) = \max(D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)),$$

onde $\max(D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m))$ denota o maior elemento do conjunto $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m)$.

A razão pela qual exigimos que os números $a_1, \ldots, a_m$ não sejam todos nulos é que, como todo número natural divide zero, $D(0) = \mathbb{N}$. Logo, se todos os números $a_1, \ldots, a_m$ fossem iguais a zero, teríamos $D(a_1) \cap \cdots \cap D(a_m) = \mathbb{N}$, que não possui um maior elemento.

Exemplo 1. *Os números* $12, 18$ *e* 30 *têm conjuntos de divisores respectivamente iguais a*

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{ e}$$

$$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}.$$

A interseção $D(12) \cap D(18) \cap D(30) = \{1, 2, 3, 6\}$ *é formada pelos números naturais que são divisores comuns de* $12, 18$ *e* 30*. O maior elemento de* $D(12) \cap D(18) \cap D(30)$ *é, portanto, o maior divisor comum de* $12, 18$ *e* 30*, isto é,* $\operatorname{mdc}(12, 18, 30) = 6$.

A seguir, exibiremos alguns métodos para calcular o MDC de números naturais.

Primeiro método: listagem de divisores, consiste no que já foi feito no exemplo 1. Listamos os divisores de cada número e procuramos o maior dentre os divisores comuns a todos. Esse método não será eficaz se os números dados tiverem muitos divisores. O objetivo do exemplo a seguir é ilustrar o quão difícil a aplicação desse método pode ficar se considerarmos números com muitos divisores.

Exemplo 2. *Vamos calcular o MDC entre* 13650 *e* 27720 *usando o método da listagem de divisores.*

$$\begin{gathered} D(13650) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 21, 25, 26, 30, 35, 39, \\ 42, 50, 65, 70, 75, 78, 91, 105, 130, 150, 175, 182, 195, 210, 273, \\ 325, 350, 390, 455, 525, 546, 650, 910, 975, 1050, 1365, 1950, \\ 2275, 2730, 4550, 6825, 13650\}. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D(27720) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 21, \\ 22, 24, 28, 30, 33, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, \\ 77, 84, 88, 90, 99, 105, 110, 120, 126, 132, 140, 154, 165, 168, 180, \\ 198, 210, 220, 231, 252, 264, 280, 308, 315, 330, 360, 385, 396, \\ 420, 440, 462, 495, 504, 616, 630, 660, 693, 770, 792, 840, 924, \\ 990, 1155, 1260, 1320, 1386, 1540, 1848, 1980, 2310, 2520, 2772, \\ 3080, 3465, 3960, 4620, 5544, 6930, 9240, 13860, 27720\}. \end{gathered}$$

Os números 13650 *e* 27720 *têm, respectivamente,* 48 *e* 96 *divisores. Os divisores comuns desses dois números são*

$$D(13650) \cap D(27720) =$$
$$= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}.$$

Logo,

$$\operatorname{mdc}(13650, 27720) = \max(D(13650) \cap D(27720)) = 210.$$

Segundo método: divisões sucessivas. Esse método, também conhecido como **algoritmo de Euclides**, pode ser aplicado com sucesso ao cálculo do MDC entre dois números naturais. Mais adiante veremos que, aplicando-o várias vezes, também é possível usá-lo para o cálculo do MDC de mais de dois números. O método se baseia nas duas observações a seguir.

Observação 3. *Se* a *e* b *são números naturais, com* $b \neq 0$*, e* r *é o resto da divisão de* a *por* b*, então*

$$\operatorname{mdc}(a, b) = \operatorname{mdc}(b, r). \tag{1}$$

Observação 4. *Se $b \neq 0$, então*

$$\operatorname{mdc}(b, 0) = b. \tag{2}$$

O método consiste nos seguintes passos:

1. Se os dois números são iguais a zero, o MDC não existe.
2. Se um dos números for igual a zero, o MDC será o outro número.
3. Se os dois números são diferentes de zero, mas são iguais, o MDC será qualquer um dos dois.
4. Se os dois números são diferentes de zero e diferentes um do outro, divida o maior pelo menor.
5. Se o resto da divisão for igual a zero, o MDC é o menor dos números.
6. Se o resto da divisão for diferente de zero, retorne ao passo 4, substituindo o maior número pelo menor e o menor número pelo resto.
7. Repita os passos 4,5 e 6 até que o resto da divisão seja igual a zero.

Geralmente usamos uma grade como a ilustrada abaixo para fazermos as divisões sucessivas.

(3)

Vamos explicar como é o preenchimento da grade (3) aplicando o algoritmo descrito acima a um exemplo.

Exemplo 5. *Vamos calcular novamente o MDC do exemplo 2, usando agora o algoritmo de Euclides. De início, colocamos os dois números na linha do meio da grade, sendo maior número* (27720) *colocado na primeira casa à esquerda e o menor número* (13650) *colocado na segunda casa, ao lado do maior número.*

27720	13650		

(4)

Na linha superior colocaremos os quocientes e na linha inferior coolocaremos os restos de todas as divisões sucessivas que faremos. Dividindo 27720 *por* 13650, *obtemos quociente igual a* 1 *e resto igual a* 420. *Colocamos o quociente logo acima do menor número* (13650) *e o resto logo abaixo do maior número* (27720)*:*

	1		
27720	13650		
420			

(5)

Em seguida, o resto da primeira divisão deve ser colocado ao lado do divisor da primeira divisão, no nosso caso, 13650.

	1		
27720	13650	420	
420			

(6)

O processo é repetido, dividindo-se agora 13650 *por* 420, *o que fornece quociente* 32 *e resto* 210.

	1	32	
27720	13650	420	
420	210		

(7)

O resto 210 *é colocado à direita do divisor da divisão anterior:* 420.

	1	32	
27720	13650	420	210
420	210		

(8)

A divisão de 420 *por* 210 *é exata, o que interrompe o algoritmo:*

	1	32	2
27720	13650	420	210
420	210	0	

(9)

Portanto, o MDC entre 27720 *e* 13650 *é igual a* 210.

Terceiro método: decomposição em fatores primos. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números naturais diferentes de zero. Se um deles for igual a 1, o MDC de todos esses números será também igual a 1. Caso contrário, podemos escrever cada um deles como um produto de potências de primos distintos:

$$a_i = p_1^{r_1} \ldots p_\ell^{r_\ell}, \tag{10}$$

Com as fatorações de $a_1, \ldots, a_n$ à disposição, é possível calcular $\operatorname{mdc}(a_1, \ldots, a_n)$ da seguinte forma:

> Se p é um número primo que divide $a_1, a_2, \ldots, a_n$ simultaneamente, então p divide o MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Mais precisamente, seja p^{s_1} a maior potência de p que divide a_1, seja p^{s_2} a maior potência de p que divide a_2, e assim por diante; se $t = \min\{s_1, \ldots, s_n\}$ é o menor dos números $s_1, s_2, \ldots, s_n$, então p^t é a maior potência de p que divide o MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Além disso, o produto de todas as potências p^t, com p e t dados como acima, é exatamente igual ao MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

De uma maneira mais resumida, temos que:

> O MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é igual ao produto das potencias p^s, onde p varia sobre todos os primos que dividem simultaneamente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e p^s é a maior potência de p que divide simultaneamente $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. *Calculemos* $\text{mdc}\,(13650, 27720)$ *usando, agora, o método da decomposição em fatores primos. Fatorando os dois números em questão, obtemos:*

$$13650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13,$$

$$27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Os primos que dividem simultaneamente os dois números dados são $2, 3, 5$ *e* 7*. O primo* 2 *aparece com expoente* 1 *na decomposição de* 13650 *e com expoente* 3 *na decomposição de* 27720*. Devemos escolher o menor expoente (ou, o que é o mesmo, a maior potência de* 2 *que divide ambos os números). Portanto* $2^1 = 2$ *é a potência de* 2 *que compõe* $\text{mdc}\,(13650, 27720)$*. Fazendo o mesmo para os outros primos que dividem* 13650 *e* 27720 *simutaneamente, obtemos*

$$\text{mdc}\,(13650, 27720) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210.$$

A seguir, exibimos um exemplo onde calculamos o MDC de mais de dois números utilizando o método de decomposição em fatores primos.

Exemplo 7. *Para calcular* $\text{mdc}\,(700, 770, 1470)$ *pelo terceiro método, fatoramos os três números como produtos de potências de primos, encontrando* $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$*,* $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ *e* $1470 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$*. Assim, tomando o produto das maiores potências dos primos* 2*,* 5 *e* 7 *que dividem simultaneamente os três números dados, obtemos*

$$\text{mdc}\,(700, 770, 1470) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70.$$

Observação 8. *Pode ocorrer que não existir um primo* p *que divida todos os números* $a_1, \ldots, a_n$*. Nesse caso, esses números não têm fatores em comum além de* 1*, logo,* $D(a_1) \cap \ldots \cap D(a_n) = \{1\}$ *e* $\text{mdc}\,(a_1, \ldots, a_n) = 1$*.*

Exemplo 9. *Para calcular* $\text{mdc}\,(490, 845, 1001)$*, começamos fatorando os três números como produtos de potências de primos:* $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$*,* $845 = 5 \cdot 13^2$ *e* $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$*. Como não há primos que dividam* 490*,* 845 *e* 1001 *ao mesmo tempo, concluímos, pela observação anterior, que* $\text{mdc}\,(490, 845, 1001) = 1$*. Verifique que* $\text{mdc}\,(490, 845) = 5$*,* $\text{mdc}\,(845, 1001) = 13$ *e* $\text{mdc}\,(490, 1001) = 7$*.*

2 Propriedades do MDC

Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades que facilitam o cálculo do MDC de dois ou mais números. Comecemos com uma caracterização de números naturais primos entre si.

Lembremos que dois números naturais a e b são chamados **primos entre si** ou **relativamente primos** se o único divisor comum de a e b é o número 1. Temos, então, que:

Dois números naturais a e b são primos entre si se, e somente se, $\text{mdc}\,(a, b) = 1$.

Os números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados **dois a dois primos entre si** quando, para cada dois índices $1 \leq i < j \leq n$, tivermos $\text{mdc}\,(a_i, a_j) = 1$. Os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados **primos entre si** quando seu único divisor comum for o número 1. Temos o seguinte:

Se os números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são dois a dois primos entre si, então eles são primos entre si, mas não vale a recíproca, isto é, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ podem ser primos entre si sem serem dois a dois primos entre si.

De fato, supondo que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são dois a dois primos entre si, se d divide todos os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então d divide dois quaisquer desses números. Logo, $d = 1$, pois o MDC de dois quaisquer desses números é igual a 1. O exemplo 9 mostra que não vale a recíproca.

Se o menor dos números naturais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divide os outros, então esse menor número é igual ao MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

De fato, como esse menor elemento divide todos os outros e divide ele mesmo, ele é um divisor comum de todos os números da lista. Por outro lado, ele é o maior divisor comum, pois é o maior número que divide ele mesmo.

Exemplos 10.

(1) $\text{mdc}\,(3, 9, 18) = 3$.

(2) $\text{mdc}\,(15, 60, 180) = 15$.

(3) *O MDC de números pares é um número par. Em particular, números pares nunca são primos entre si.*

Sejam $k, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números naturais não nulos. Então $$\text{mdc}\,(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n) = k \cdot \text{mdc}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Para justificar esse fato, note primeiro que, se ℓ é o MDC de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então $k\ell$ é um divisor comum de $ka_1, ka_2, \ldots, ka_n$, de forma que $k\ell \leq \text{mdc}\,(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$. Por outro lado, se g é o MDC de $ka_1, ka_2, \ldots, ka_n$, então k divide g, de forma que podemos escrever $g = kg'$, em que g' é um divisor comum de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Portanto, $g' \leq \ell$ e, daí, $g = kg' \leq k\ell$. Mas, já vimos que $k\ell$ é um divisor comum de $ka_1, ka_2, \ldots, ka_n$, de modo que $g = k\ell$.

Exemplo 11. *Como* $340 = 17 \cdot 20$*,* $255 = 17 \cdot 15$ *e* $323 = 17 \cdot 13$*, e* 20*,* 15 *e* 13 *não têm fatores primos comuns, temos que*

$$\text{mdc}\,(340, 255, 323) = 17 \cdot \text{mdc}\,(20, 15, 13) = 17 \cdot 1 = 17.$$

Sejam a e b números naturais diferentes de zero. Então o MDC de a e b pode ser escrito de uma das seguintes maneiras, com m e n naturais:

$$\begin{aligned} \mathrm{mdc}\,(a,b) &= ma+nb, \\ \mathrm{mdc}\,(a,b) &= ma-nb, \qquad (11) \\ \mathrm{mdc}\,(a,b) &= nb-ma. \end{aligned}$$

Os números m e n podem ser encontrados a partir do algoritmo de Euclides, como faremos no exemplo a seguir.

Exemplo 12. *Vamos escrever* $\mathrm{mdc}\,(210,119)=7$ *como em (11). Para isso, precisamos encontrar naturais m e n adequados. As divisões sucessivas que, pelo algoritmo de Euclides, determinam o MDC podem ser escritas como*

$$\begin{aligned} 210 = 119\cdot 1+91 &\Rightarrow 91 = 210-119, \\ 119 = 91\cdot 1+28 &\Rightarrow 28 = 119-91, \\ 91 = 28\cdot 3+7 &\Rightarrow 7 = 91-3\cdot 28. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 7 &= 91-3\cdot 28 = 91-3\cdot(119-91) \\ &= 4\cdot 91-3\cdot 119 = 4\cdot(210-119)-3\cdot 119 \\ &= 4\cdot 210-7\cdot 119. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $a=210$ e $b=119$ na segunda igualdade em (11), podemos tomar $m=4$ e $n=7$.

A propriedade acima nos permite concluir que os divisores comuns de a e b são também divisores de $\mathrm{mdc}\,(a,b)$, ou seja, o conjunto $D(a)\cap D(b)$ é formado pelos divisores de $\mathrm{mdc}\,(a,b)$.

Se a e b são inteiros não nulos, e d divide a e b, então d divide $\mathrm{mdc}\,(a,b)$.

De fato, se d divide a e b, podemos escrever $a=dk$ e $b=dq$, com k e q naturais. Se $\mathrm{mdc}\,(a,b)=ma+nb$, então $\mathrm{mdc}\,(a,b)=mdk+ndq=d(mk+nq)$, logo, d divide $\mathrm{mdc}\,(a,b)$. Os outros dois casos (i.e., aqueles em que $\mathrm{mdc}\,(a,b)=ma-nb$ ou $\mathrm{mdc}\,(a,b)=nb-ma$) são similares.

Sejam a,b e c números naturais diferentes de zero. Então:

$$\mathrm{mdc}\,(a,b,c)=\mathrm{mdc}\,(\,\mathrm{mdc}\,(a,b),c).$$

Chamando $\mathrm{mdc}\,(a,b)=d$, $\mathrm{mdc}\,(a,b,c)=g$ e $\mathrm{mdc}\,(\,\mathrm{mdc}\,(a,b),c)=g'$, temos que g' divide c e d. Como d divide a e b, temos que g' divide a,b e c, logo $g'\leq g$. Por outro lado, como g divide a,b e c, temos em particular que g divide a e b. Logo, pela propriedade anterior, concluímos que g divide d. Assim, g divide d e c, donde segue (novamente pela propriedade anterior) que g divide g', logo, $g\leq g'$. Portanto, $g'=g$.

3 Exercícios sobre MDC

Nesta seção, resolvemos alguns exercícios envolvendo a noção de MDC.

Exemplo 13. *Sabe-se que a e b são dois números naturais não nulos tais que $mdc(a,b)=7$. A grade de divisões sucessivas é dada abaixo.*

	2	1	3	
a	b		11	
		0		

(12)

Determinar a e b.

Solução: a ideia é preencher a grade da direita para a esquerda, ou seja, no sentido contrário àquele que seguimos quando queremos calcular o MDC de dois números dados.

O número que aparece na linha do meio, entre b e 11 é igual a $11\cdot 3+0=33$. Assim, obtemos

	2	1	3	
a	b	33	11	
		0		

(13)

Novamente aplicando o algoritmo da direita para a esquerda, vemos que $b=33\cdot 1+11=44$. Finalmente, $a=44\cdot 2+33=88+33=121$.

Exemplo 14. *Dona Maria comprou* 160 *pirulitos,* 198 *caramelos e* 370 *chocolates para presentear as crianças de sua rua. Para tanto, ela colocou os doces em sacolas de modo que cada sacola contivesse um único tipo de doce, que a quantidade de doces em cada sacola fosse sempre a mesma e de modo que cada sacola contivesse a maior quantidade possível de doces. Depois de colocar os doces nas sacolas, Dona Maria percebeu que sobraram* 7 *pirulitos,* 11 *caramelos e* 13 *chocolates. Quantas sacolas Dona Maria fez?*

Solução: seja d o número máximo de doces que Dona Maria deve colocar em cada sacola. Se p,k e c indicam respectivamente os números de sacolas com pirulitos, caramelos e chocolates, então

$$\begin{aligned} 160 &= pd+7, \\ 198 &= kd+11, \\ 370 &= cd+13. \end{aligned}$$

Assim, $pd=153$, $kd=187$ e $cd=357$, e concluímos que d deve ser o maior número que divide $153,187$ e 357, ou seja, $d=\mathrm{mdc}\,(153,187,357)$. Aplicando o algoritmo de Euclides para 153 e 187, obtemos

	1	4	2	
187	153	34	17	
34	17	0		

(14)

Logo, $\text{mdc}\,(187, 153) = 17$. Pela última propriedade do MDC estudada acima, obtemos

$$\text{mdc}\,(153, 187, 357) = \text{mdc}\,(17, 357) = 17,$$

pois $357 = 17 \cdot 21$.

De posse do número $d = 17$ de doces em cada sacola, calculamos $p = 153/17 = 9$, $k = 187/17 = 11$ e $c = 357/17 = 21$. Portanto, Dona Maria fez 9 sacolas com pirulitos, 11 sacolas com caramelos e 21 sacolas com chocolates, e cada sacola tinha 17 doces.

Exemplo 15. *O MDC de dois números naturais é* 10 *e o maior deles é* 120*. Determine o maior valor possível para o outro número.*

Solução. Seja n o número a ser determinado. Como $\text{mdc}\,(120, n) = 10$, temos que $n = 10k$ e $k \in \mathbb{N}$. Substituindo n por $10k$ obtemos $\text{mdc}\,(120, 10k) = 10$, ou seja, $10 \cdot \text{mdc}\,(12, k) = 10$, logo, $\text{mdc}\,(12, k) = 1$. Como $10k < 120$, temos que $k < 12$. A condição $\text{mdc}\,(12, k) = 1$ força k a ser diferente de $2, 3, 4, 6, 8, 9$ e 10. Assim, as únicas possibilidades para k são $k \in \{1, 5, 7, 11\}$, logo $10k \in \{10, 50, 70, 110\}$ e desses valores o maior é 110. Portanto, o maior valor possível para o outro número é 110. □

Exemplo 16. *Dividindo-se dois números naturais pelo seu MDC, a soma dos quocientes obtidos é igual a* 8*. Determine esses números, sabendo que sua soma é* 384*,*

Solução. Sejam a e b os números procurados e $d = \text{mdc}\,(a, b)$. Podemos escrever $a = dk$ e $b = dq$, onde k e q são os quocientes das divisões de a e b por d. Sabemos que $k + q = 8$ e que $a + b = 384$. Logo, $dk + dq = 384$, isto é, $d(k + q) = 384$. Como $k + q = 8$, concluímos que $d = 384/8 = 48$.

Uma vez que $d = \text{mdc}\,(a, b) = \text{mdc}\,(dk, dq) = d \cdot \text{mdc}\,(k, q)$, temos que $\text{mdc}\,(k, q) = 1$. Agora, os números naturais primos entre si cuja soma é igual a 8 são 1 e 7 ou 3 e 5. No primeiro caso, temos $a = 1 \cdot 48 = 48$ e $b = 7 \cdot 48 = 336$. No segundo caso, temos $a = 3 \cdot 48 = 144$ e $b = 5 \cdot 48 = 240$. É claro que há também a possibilidade de $a = 336$ e $b = 48$ ou $a = 240$ e $b = 144$. □

Dicas para o Professor

O assunto dessa aula pode ser desenvolvido em dois encontros de 50 minutos cada. Você deve trabalhar a maior quantidade possível de exemplos com os alunos para que eles fixem os diferentes métodos para o cálculo do MDC.

A propriedade de que o MDC de dois números pode ser escrito como combinação desses dois números (conhecida como Teorema de Bachet-Bézout) tem uma grande importância teórica e é fundamental para a resolução de *equações diofantinas lineares*, isto é, equações da forma $ax + by = c$, com a, b, c naturais dados. Para entender como resolver uma tal equação, recomendamos consultar as referências listadas abaixo.

Os exemplos envolvendo números com uma grande quantidade de divisores servem para comparar os diferentes métodos para o cálculo do MDC. Uma comparação entre a eficiência dos três métodos pode parecer indicar que o terceiro método é o mais eficiente. No entanto, como esse método depende da fatoração em primos, ele não é computacionalmente viável para números muito grandes. O método mais eficaz, do ponto de vista computacional, é o segundo (algoritmo de Euclides). É notável que esse algoritmo já seja conhecido desde a antiguidade. Ele aparece no livro VII dos *Elementos* de Euclides.

É uma boa ideia estimular os alunos a testarem os algoritmos de cálculo do MDC para números grandes, possivelmente com o auxílio de calculadoras ou de um computador.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. E. de Alencar Filho. *Teoria Elementar dos Números.* São Paulo, Nobel, 1989.

3. J. P. de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro, Editora IMPA, 1998.