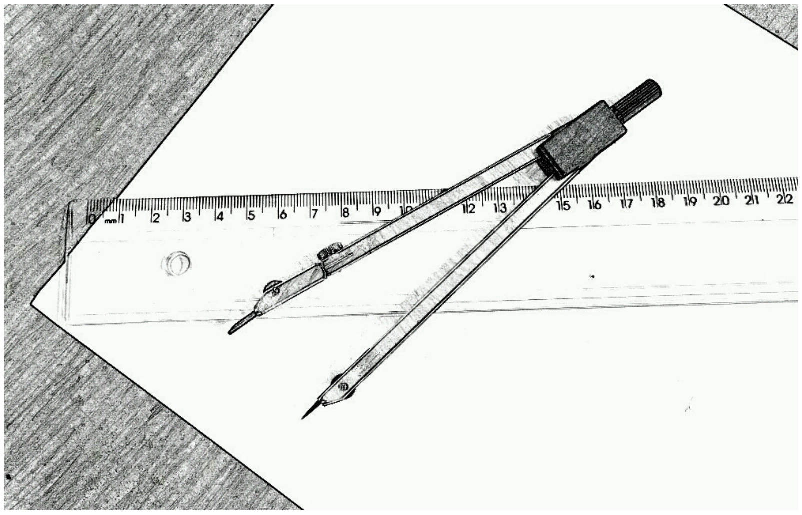
1. GEOMETRIA E CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

Muitos conceitos e problemas de Geometria podem ser explorados a partir de construções com régua e compasso, e manipulações de material concreto. Para iniciar o trabalho com problemas de Geometria entendemos ser interessante explorar algumas atividades iniciais nas quais possam ser discutidos os instrumentos básicos de construção: a régua e o compasso.

1. 1. ATIVIDADE BÁSICA DE CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Material necessário: régua, compasso, tesoura, folhas brancas.



1ª PERGUNTA: ***Para que serve uma régua?***
É um instrumento que serve para "traçar segmentos de reta".

Embora uma primeira resposta, por impulso habitual, possa ser "a régua serve para medir", motivada pela graduação em centímetros e milímetros da régua escolar, é importante entender que o objeto (segmento de reta) que será medido deve existir antes da medição. Desta forma, as graduações em centímetros e milímetros, na régua escolar, são secundárias diante do objetivo essencial de um instrumento que serve para traçar linhas retas definida por dois pontos.

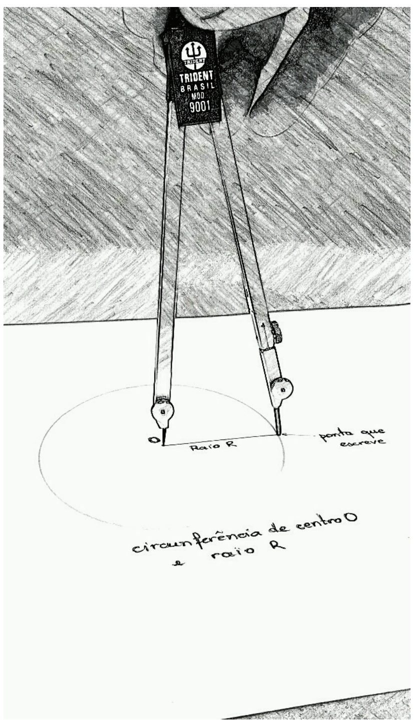
Recomenda-se a discussão sobre os conceitos: reta, semirreta e segmentos de reta, introduzindo a notação e representação. Uma alternativa real para o uso de régua e compasso é apresentada no Anexo B, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

2ª PERGUNTA: ***Para que serve um compasso?***
Compasso é um instrumento para desenhar círculos e arcos de círculo, ele serve para transferir distâncias entre dois pontos e para comparar medidas de segmentos distintos.

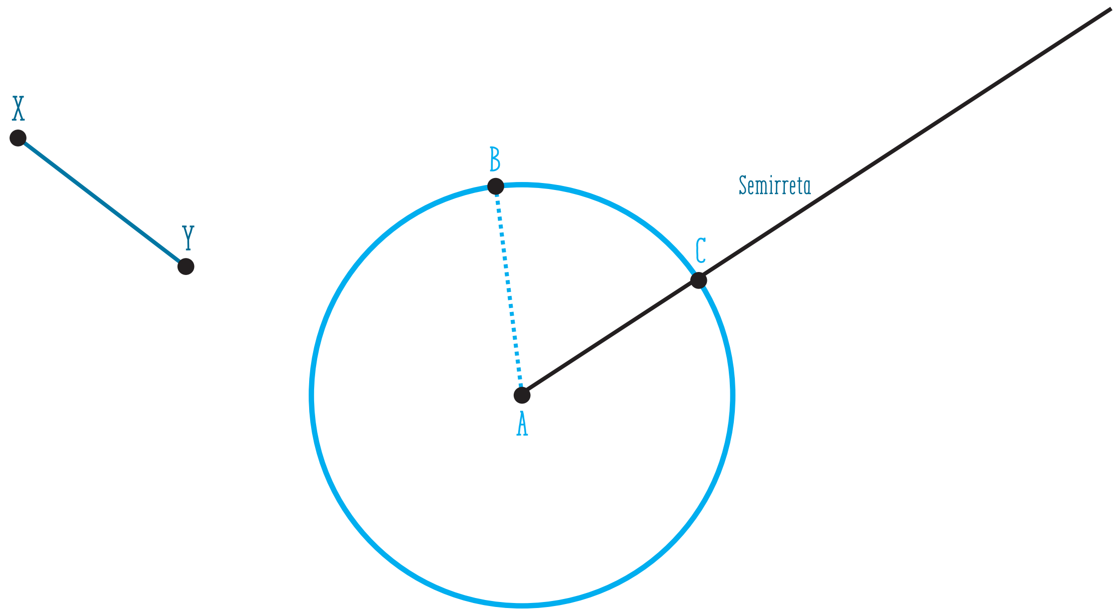
Com ele, é possível desenhar uma circunferência ou parte de uma circunferência, que se chama arco. Para desenhar uma circunferência de "centro" em um ponto e uma medida de "raio", fixa-se a parte pontuda do compasso (chamada ponta-seca) no ponto dado, abre-se o compasso até que a ponta que escreve esteja à distância igual à medida do raio, e, então, mantendo o compasso em posição vertical em relação ao papel, gira-se o compasso para desenhar (vide figura).

Todos os pontos de uma determinada circunferência estão à mesma distância fixada (pela abertura do compasso) a partir do centro O, um ponto também fixado, *a priori*.

Com essa funcionalidade, o compasso é um instrumento que serve para "transportar medidas" de um lugar para outro. Por exemplo, dado um segmento cujas extremidades são os pontos X e Y, pode-se obter um segmento de "mesma medida" a partir de um ponto qualquer A, usando o compasso para esta tarefa: basta abrir o compasso, usando a medida do segmento XY e, com cen-



tro em A, traçar a circunferência. Esta distância pode ser marcada sobre uma semirreta com origem em A como o ponto C de intersecção da circunferência com a semirreta.



QUESTIONAMENTO: É preciso saber quanto mede XY em centímetros ou milímetros para realizar esta tarefa?

A resposta é "não". A ideia de comprimento de um segmento na Geometria não precisa de medida, enquanto dado numérico. As medidas de dois segmentos podem ser comparadas utilizando o compasso. O dado numérico, se necessário, pode vir *a posteriori*, como na figura do Problema 1, a seguir.

Mas, dadas as medidas numéricas, usando, por exemplo, uma régua graduada para ler as medidas, é possível desenhar segmentos de 2,4cm ou medir o lado de um quadrado e notar que ele mede 4,3cm, por exemplo. Neste caso, associa-se a Aritmética à Geometria.

OBSERVAÇÃO: No tempo dos gregos, o compasso não parava aberto quando se tirava o apoio do papel, chamando-se compasso "colapsante". Entretanto, eles sabiam transferir a distância entre dois pontos usando este compasso "deficiente".

Veja no anexo C (p. 79) deste texto, arquivo disponibilizado, que utiliza recurso de Geometria Dinâmica, no qual é apresentada uma construção que realiza o transporte de medidas, simulando um compasso colapsante (Compasso Colapsante).

1.2. PROBLEMA 1

Desenhar dois segmentos distintos de comprimentos 5,5cm e 3,7cm, respectivamente. Sobre uma reta dada, marcar pontos A, B e C de modo que AB meça 5,5cm, BC meça 3,7cm e AC tenha medida igual à soma "(5,5 + 3,7)cm".

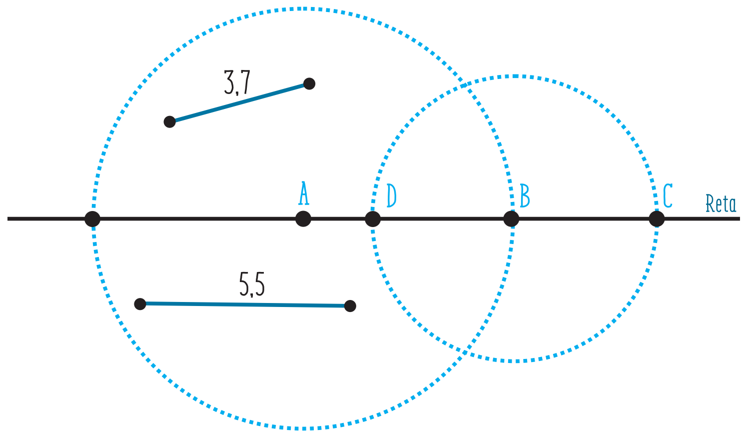
Para iniciar o trabalho com problemas, em geral, é evidente a necessidade da leitura e compreensão do problema para responder a contento às perguntas:

- O que é dado?
- O que é pedido?
- Que instrumentos você pode utilizar para desenhar?

No entanto, a formulação de questionamentos que possam levar à investigação de uma resposta também é importante. A seguir, são apresentados alguns questionamentos que podem conduzir a uma exploração da resolução:

- Os pontos encontrados são únicos? Discuta.
- Encontre D sobre a reta tal que AD tenha medida "(5,5 – 3,7) cm".
- O ponto D é único? Discuta.
- Confira se as soluções encontradas estão de acordo com as condições dadas.
- Que outros questionamentos podem levar à solução do problema proposto?

Na ilustração apresentada, a seguir, podem-se identificar pontos que são soluções das questões levantadas (pontos C e D, respectivamente). Nesta figura aparece apenas uma solução para cada, mas podemos encontrar outra solução, tomando como ponto B, o outro ponto de intersecção da circunferência de raio 5,5cm e centro A, com a reta dada. Neste caso teremos uma figura simétrica em relação ao ponto A.



Mas, a pergunta pode ser mais geral, retirando-se a condição do ponto pertencer à reta. Esta situação abre espaço para discussão mais ampla do problema, o mesmo ocorrendo com os questionamentos apresentados na sequência:

- Existem outros pontos X tais que AX tenha medida igual à diferença "(5,5 – 3,7) cm"?
- Considerando os pontos A e B da primeira solução do Problema 1, construa duas circunferências; uma com centro em A e raio 5,5cm e outra com centro em B e raio 3,7cm. Sejam E e J os pontos de encontro das duas circunferências. Pergunta-se:

  a) Qual o perímetro do triângulo ABJ?
  b) Qual o perímetro do triângulo ABE?
  c) Qual é o comprimento do maior segmento na reta dada que é determinado pelas duas circunferências?

A sequência dos questionamentos mostra que, trabalhando Metodologia de Resolução de Problema, apresentar uma resposta para a pergunta inicial é apenas uma parte do trabalho com os conceitos. O problema abre possibilidades para uma compreensão em profundidade dos conceitos matemáticos, por meio de exploração, investigação e descoberta de novos conceitos e propriedades.

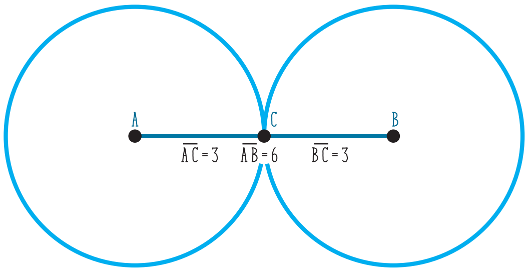
Os questionamentos dados permitem discutir a comparação entre o comprimento obtido no item c) e os perímetros dos triângulos construídos. Podemos investigar se o resultado da comparação poderia ser ou não esperado a partir das construções iniciais. Este é um passo importante, antes mesmo de sistematizar o que foi trabalhado.

1.3. PROBLEMA 2 – CONSTRUINDO TRIÂNGULOS

Usando a régua, construa três segmentos com as medidas 3cm, 4cm e 6cm. Desenhe um ponto A fora dos segmentos e construa um triângulo com um dos vértices em A e que tenha lados com as medidas dadas. O resultado é único?

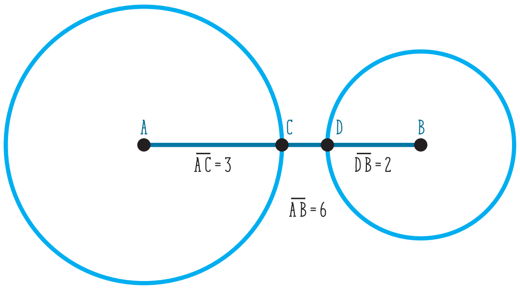
Algumas atividades para investigar a possibilidade de construção com certas medidas dadas podem ser feitas, por exemplo:

a) Experimentar, usando o método de construção de segmentos do Problema 1, construir um triângulo com as medidas 3cm, 3cm e 6cm. O que ocorre? Pode explicar o que observa?



$\overline{AB}=6$
$\overline{AC}=3$ $\overline{BC}=3$
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$

b) Experimentar, novamente, construir um triângulo com as medidas 3cm, 2cm e 6cm. O que ocorre? Pode explicar o que observa?



$\overline{AB}=6$
$\overline{AC}=3$ $\overline{DB}=2$
$\overline{AC}+\overline{DB}<\overline{AB}$

A finalização da discussão, com as variações que serão apresentadas a seguir, prepara o terreno para a exploração de um importante conceito em Geometria, a saber: a possibilidade de construção de triângulos dadas as medidas dos lados.

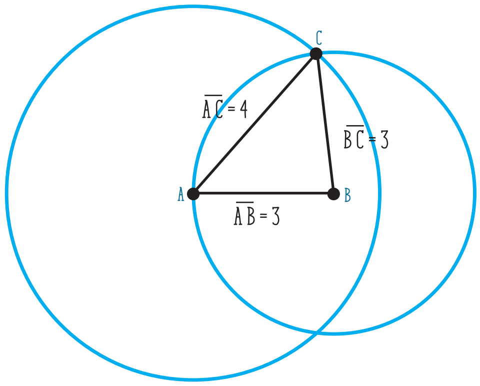
VARIAÇÕES:

- Dadas duas medidas, 3cm e 4cm, achar todos os valores possíveis em números inteiros para que um triângulo possa ser construído.

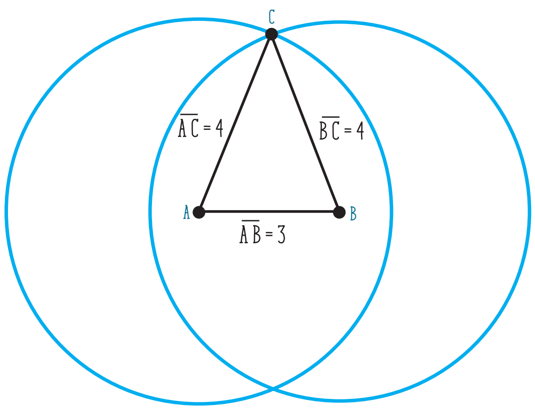
• Construa os triângulos, descreva-os e explore as propriedades especiais que eles apresentam.

• Quais as medidas mínima e máxima de perímetro que os triângulos construídos podem ter?

Observe as construções de alguns casos para a terceira medida:



Medidas 3, 3 e 4



Medidas 3, 4 e 4

A terceira medida pode ser 5, 6 ou 7cm? Justifique sua resposta.

A discussão deve ser conduzida de modo a justificar a possibilidade de construção de um triângulo pela existência do terceiro vértice como intersecção não vazia de círculos.

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante destacar que, ao estimular esta investigação na sala de aula, o professor deve levar todos os alunos à percepção da condição que irá sistematizar ao final como "a desigualdade triangular". Esta condição é necessária e suficiente para a construção de triângulos e é um resultado de Geometria do currículo do Ensino Fundamental.

Uma possível abordagem é conduzir um experimento no qual os alunos constroem tabelas em que se registram, em diferentes linhas, escolhas de três medidas e a possibilidade ou não da construção de um triângulo com tais medidas (tabelas com duas colunas, uma para as medidas de possíveis lados e outra para indicar a possibilidade ou não da construção do triângulo com as medidas dadas). Depois de montada a tabela, discutir, com a participação de todos os alunos, as possibilidades, as impossibilidades e o caso-limite com 3cm, 4cm e 7cm, que é interpretado como o caso de colinearidade.

Com os dados organizados, o professor pode estimular os alunos a enunciar suas conjecturas. Somente depois de os alunos expressarem, com suas próprias palavras, a desigualdade triangular é que se recomenda, ao professor, sintetizar a discussão, apresentando a propriedade na sua forma tradicional. É importante registrar no caderno as desigualdades que corroborem a conclusão para cada caso estudado.

A sequência proposta é, ainda, adequada para explorar perímetro de triângulos em diferentes abordagens, por exemplo: Qual é o perímetro de um triângulo conhecidos os seus lados? É possível construir um triângulo de perímetro 18 e lados 6 e 3?

1.4. PROBLEMA 3 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 35 – NÍVEL 1

Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3cm, 4cm e 6cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo temos duas figuras que ele fez.

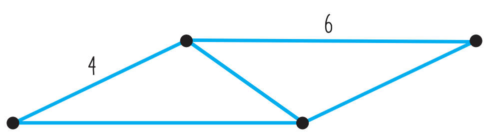


Figura I

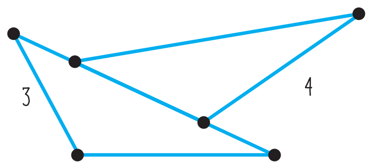


Figura II

a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas Figuras I e II?
b) Calcule os perímetros das Figuras I e II.
c) Qual é o "menor" perímetro de uma figura que Miguilim pode formar?
d) Desenhe duas figuras que ele pode formar com este perímetro.

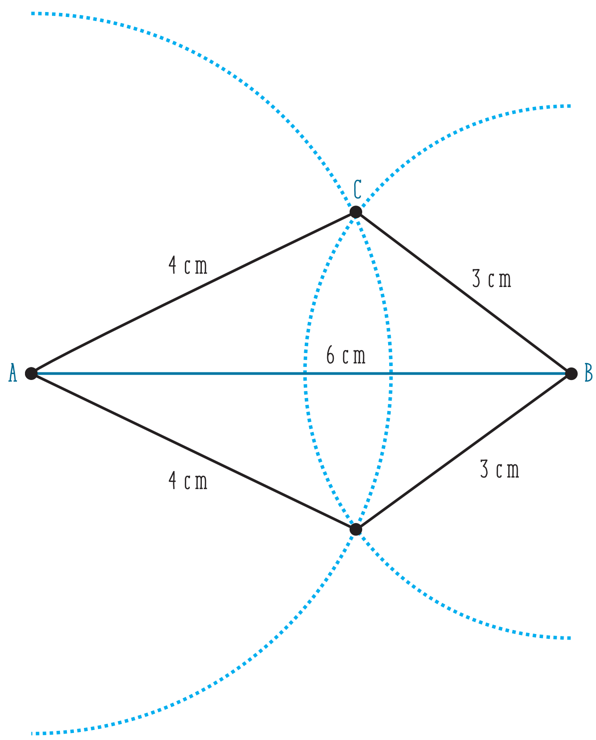
Na exploração deste problema, aproveita-se o trabalho realizado, anteriormente, com destaque para a possibilidade de conduzir a discussão para o paralelismo entre os lados correspondentes dos triângulos na formação da Figura 1. Recomenda-se que a atividade seja iniciada com a utilização de triângulos recortados em papel sulfite, ou outro tipo de papel para estimular a investigação a ser realizada pelos alunos. Atenção deve ser dada, se possível, nas diferentes figuras e no registro dos resultados obtidos, tanto das formas quanto de seus perímetros.

Além dos questionamentos já apresentados outros poderão ser acrescentados, especialmente os que fazem refletir sobre as figuras que podem ser obtidas como, por exemplo:

– Sempre que colamos dois lados de mesma medida obtemos um paralelogramo?

– Quais figuras podem ser obtidas quando juntamos as duas figuras por lados de mesma medida?

A discussão sobre a figura que se obtém quando se justapõem dois lados de mesma medida (em alguns casos se obtém um paralelogramo, mas em outros não), abre a possibilidade de exploração do que caracteriza um paralelogramo e a diferença entre um paralelogramo e outras figuras que são possíveis de formar (pipa, entre elas). A figura a seguir, mostra a pipa que é obtida pela junção dos dois triângulos do problema pelo lado de medida 6cm.



Uma observação importante sobre uma pipa é a propriedade de suas diagonais: elas são perpendiculares pelo ponto médio da diagonal "menor".

QUESTIONAMENTO: Por que esta propriedade é válida?

1.5. PROBLEMA 4 – RECORTES DO RETÂNGULO

De quantas maneiras distintas podemos dividir um retângulo em duas partes de igual área, utilizando um segmento de reta?

Na abordagem do Problema 4 – Recortes do Retângulo está proposta a utilização de diversos recursos: material concreto (dobradura e recorte de papéis coloridos) e de *software* livre de Geometria Dinâmica, especificamente o *software* GeoGebra[1].

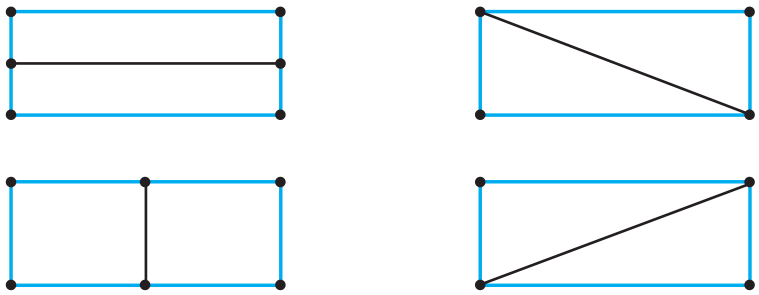
Inicialmente está proposta uma atividade investigativa com dobraduras. O material necessário é composto de *kit* de papéis retangulares coloridos, tesoura, régua e transferidor. Mais especificamente, a proposta para a atividade é a seguinte: usando retângulos de papel colorido, solicitar ao aluno que produza, em cada um dos retângulos, uma dobra no papel de modo que as duas partes resultantes fiquem com mesma área. Indagar como pode garantir que as áreas sejam iguais, lembrando que no caso das dobras pelos pontos médios de lados opostos isto é fácil por sobreposição, mas no caso de dobra pela diagonal isto não é evidente. Ou seja, nas primeiras dobraduras o aluno pode conferir, sem recorte, que as partes têm mesma área, e comparar as medidas dos lados, por superposição, mesmo sem utilizar unidade de medida, ou usando instrumentos como o compasso para efetuar a comparação.

Para aprofundar estas noções de igualdade de área e de comprimento (ainda por sobreposição das partes destacadas das figuras), recomenda-se utilizar o recurso de recortar a figura pelo vinco da dobra produzida.

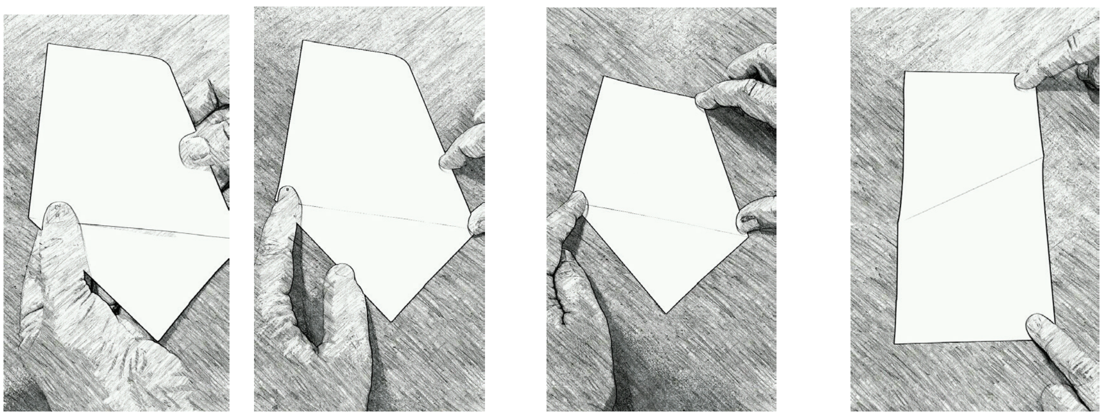
1 Aplicativo de Matemática Dinâmica que combina conceitos de Geometria e Álgebra. Escrito em linguagem Java. Permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de Geometria com outras mais adequadas à Álgebra e ao Cálculo, tendo uma vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Acesso em: 24 jun. 2013. Para baixar e instalar o programa acesse http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

A partir das dobraduras e recortes, indagar se há outras dobraduras e recortes possíveis. É possível responder quantas(os) são?

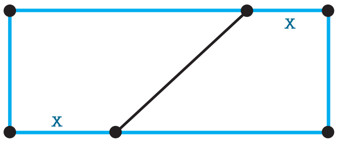
Em geral, a resposta inicial dos alunos se reduz a quatro casos: dois correspondendo à divisão perpendicular a um dos lados pelo ponto médio, e dois pelas diagonais, como pode ser visto na figura a seguir.



Caso não tenham surgido outras dobras, pode-se indagar o que ocorre quando se dobra pela linha que se obtém ao sobrepor dois vértices opostos (a sequência de fotos a seguir, apresenta o que ocorre e como proceder).



Lembrando a importância dos questionamentos ao conduzir uma aula, em que se utiliza a Metodologia de Resolução de Problemas, deve-se elaborar perguntas que levem os alunos a criarem uma generalização desta situação, como, por exemplo: Considere sobre lados paralelos do retângulo, segmentos de medida x a partir de vértices opostos dos lados escolhidos. Veja a figura com um corte ou dobra deste tipo:



Questionamentos em sequência que podem ser feitos a partir deste recorte:

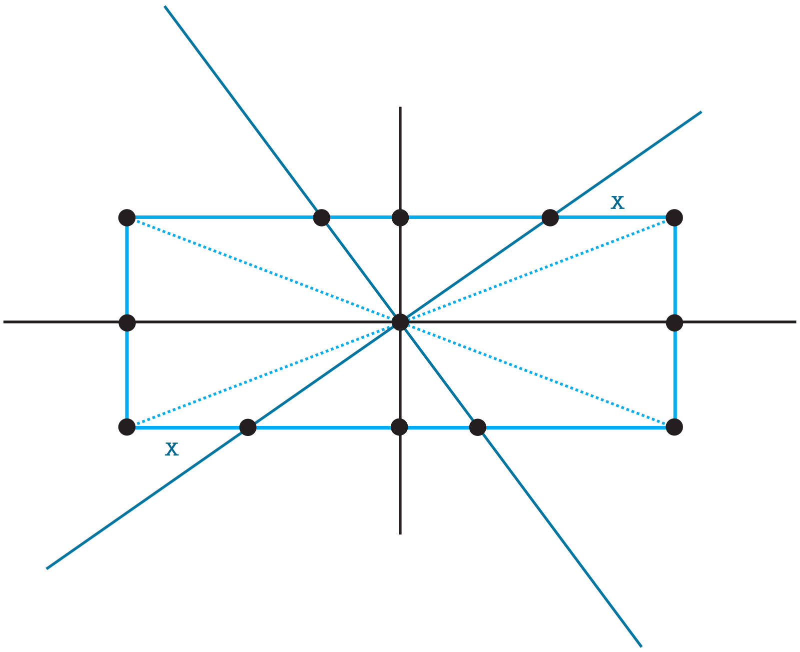
- A medida x tem que ser conhecida? Justificar a resposta.
- Quais figuras são obtidas com o recorte?
- Qual a propriedade do retângulo que garante que as partes obtidas são trapézios?
- Podemos afirmar que os dois trapézios são congruentes? Como justificar a resposta?
- Podemos afirmar que os dois trapézios possuem a mesma área? Quais as áreas dos trapézios?
- É preciso saber o valor numérico das medidas das figuras para responder às perguntas anteriores?

Todos estes questionamentos podem ser explorados por meio de uma atividade investigativa utilizando o *software* GeoGebra cujos comandos para produção de arquivo para exploração encontra-se no Anexo C 2.2.

Depois de realizada a atividade manipulativa, podemos retomar o problema e indagar se já existem condições para dar uma resposta para o problema proposto inicialmente.

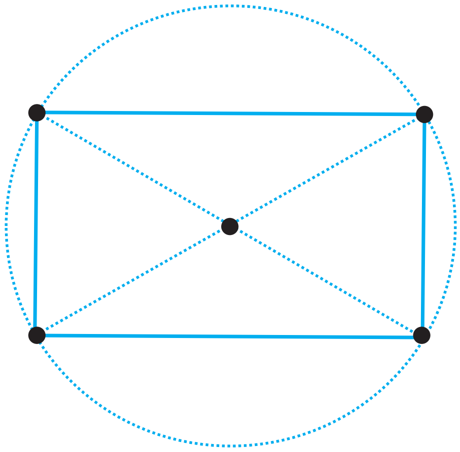
RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Observe que a manipulação vivenciada, usando dobraduras, recortes ou o *software* GeoGebra, além de permitir a constatação de propriedades geométricas, por visualização, fornece elementos para um raciocínio dedutivo que elucida os pontos essenciais da justificativa rigorosa da resposta intuída.

Mais ainda, é possível constatar, a partir das atividades, que as diagonais do retângulo se encontram num ponto que é também o encontro da reta vertical com a horizontal que repartiu o retângulo em duas metades. Nota-se que uma reta que divide o retângulo em dois trapézios de mesma área, como proposto para discussão, "também" passa por este ponto. Para se chegar a esta conclusão é importante encaminhar a atividade de sobreposição das partes recortadas anteriormente, ou seja, solicitar que os alunos tomem uma das partes de cada recorte produzido e sobreponha-os observando o que ocorre.

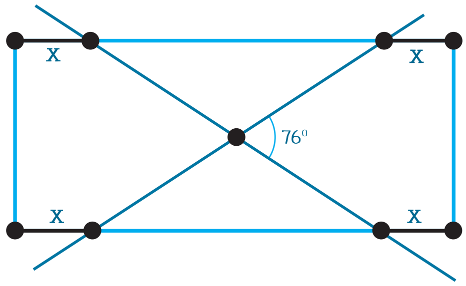


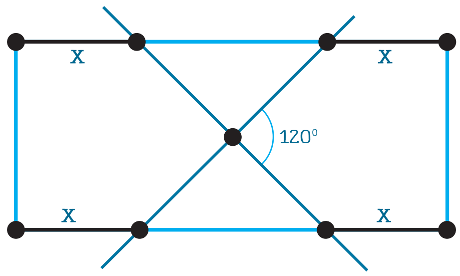
Outra constatação é que qualquer reta perpendicular a uma reta que divide o retângulo em duas partes de mesma área e passa pelo ponto destacado anteriormente, também produz duas figuras de mesma área, sendo importante experimentar por dobradura, recorte ou no arquivo do GeoGebra.

No Anexo C é apresentada uma animação com papéis coloridos que constituem uma experimentação importante deste fenômeno. O ponto especial, assim obtido, é chamado, justamente, de "centro" do retângulo, e observa-se que é sempre possível colocar um retângulo em um círculo cujo centro é exatamente este ponto e com vértices sobre o mesmo. Como justificar matematicamente esta afirmação? Sendo este um dos principais conteúdos matemáticos a ser explorado a partir do problema, recomenda-se atenção especial para as devidas justificativas.



Outro fato que pode ser sistematizado a partir das explorações anteriores é que o ângulo entre as diagonais de um retângulo, em geral, não é reto e nem tampouco é reto o ângulo entre as retas transversais que cortam o retângulo segundo uma mesma medida x, distante dos vértices, nos lados paralelos, portanto vale a pena investigar: Quando isto pode ocorrer?





Este é o momento em que a exploração com software de Geometria Dinâmica se torna eficaz como auxiliar na atividade de investigação. Uma possibilidade de uso é o arquivo disponível no Anexo C. Sabemos que os passos da resolução de problemas passam por investigação, exploração e descoberta, que podem ser feitos neste problema também por meio de recortes e sobreposição de figuras.

Indo além, na investigação, ainda são pertinentes os seguintes questionamentos:

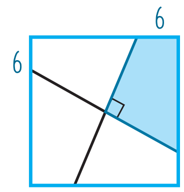
- Aumentando o tamanho x do segmento na ilustração anterior, o que acontece com as divisões?
- Diminuindo o tamanho x, como fica?
- As soluções simples iniciais correspondem a alguma posição especial da reta que faz a divisão? E a algum valor especial de x?

Estes são alguns questionamentos que nos permitem caracterizar **o quadrado como sendo um retângulo cujas diagonais são perpendiculares.**

Uma variação interessante para trabalhar com os alunos é o problema seguinte:

1.6. PROBLEMA 5 – DIVIDINDO UMA TORTA

Na hora do lanche, a mãe do Pedrinho dividiu uma torta salgada de formato quadrado de 20cm de lado entre Pedrinho e seus três amigos, cortando-a a partir de 6cm das pontas, como na figura. Ela foi justa?



Assim como o problema anterior, há alguns questionamentos que podem ser feitos para levar os alunos a construírem uma estratégia e resolver o problema:

- O que deve acontecer com os pedaços resultantes da divisão da torta, para que esta seja justa?
- Como podemos proceder para verificar se os pedaços têm todos o mesmo tamanho?
- Se ela tivesse feito os cortes a cinco centímetros das pontas, em vez de seis, ainda assim, a divisão seria justa?
- Quais são os valores que podem substituir 6 e ainda a divisão ser justa?
- Verifique se os cortes passam pelo centro do quadrado. Este resultado já era esperado? Por quê?
- Existe alguma relação deste problema com o problema do recorte do retângulo?
- Qual é o ângulo entre as diagonais de um quadrado?
- O que ocorre com os cortes da torta se as duas diagonais forem giradas simultaneamente com mesmo ângulo em torno do centro?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante, num trabalho com Resolução de Problemas, que se registrem, explicitamente, na lousa, os dados do problema e as respostas dos participantes em cada momento para propiciar condições para uma discussão. E é a partir da discussão que se deve formalizar os conceitos envolvidos e destacar as principais propriedades envolvidas.

O conjunto de ações, realizadas pelo aluno, constitui um processo, em que, é claro, surgem naturalmente os mais diversos erros. Alguns tipos de erros:

- de leitura e interpretação de enunciados;
- de estratégias;
- de aplicação de algoritmos ou de técnicas;
- de verificação da solução enquanto estratégia e não enquanto algoritmo etc.

O trabalho do professor deve levar o aluno a reconhecer e superar os erros cometidos, sem que o erro seja explicitado pelo professor. É na discussão com o grupo que o aluno deve refazer sua estratégia e validá-la. Destaque-se que é sempre possível explorar didaticamente os erros considerando as seguintes premissas:

- Respeitar o aluno, devolvendo a ele a tarefa de fazer a discussão dos resultados, com o objetivo de explorar suas potencialidades e seus conhecimentos.
- Planejar estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam o interesse dos alunos.
- Aproveitar recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de formas variadas, explorando habilidades de formular hipóteses, testá-las e discuti-las.
- Para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem, com o grupo de alunos, para aproveitar todas as oportunidades de fazê-los pensar sobre seu próprio pensamento (CURY, 2004).

Em última instância, o erro deve ser visto positivamente, como uma oportunidade única para refletir mais sobre o enunciado do problema, o que é dado e o que é pedido, as estratégias utilizadas e as soluções obtidas, para serem investigadas.

1.7. PROBLEMA 6 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 36 – NÍVEL 1

Uma folha retangular de 20cm por 30cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços, dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura ao lado. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos:

a) Qual é o comprimento do segmento AB?

b) Qual é a área de um triângulo?

c) E de um pedaço de cinco lados?

d) Com os quatro pedaços, podemos montar um quadrado com um buraco no meio como na Figura II. Qual é a área do buraco?

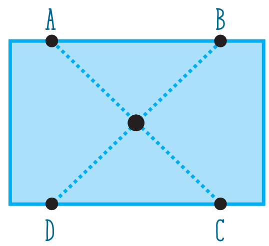


Figura I

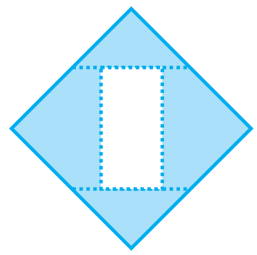


Figura II

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Recomenda-se que a abordagem deste problema seja iniciada com um resgate do problema do retângulo e a leitura cuidadosa, com destaque dos dados não numéricos do problema, quais sejam: folha retangular; segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento; A e C, B e D estão respectivamente em lados opostos; dois triângulos iguais; dois polígonos (de 5 lados) são iguais; AC e BD se encontram no centro do retângulo formando um ângulo reto.

O arquivo, que pode ser gerado no GeoGebra a partir de comandos encontrados no Anexo C (p. 84), permite ampliar o entendimento do problema. Recomenda-se, fortemente, não iniciar a resolução do problema enquanto as propriedades geométricas dos dados não estiverem totalmente compreendidas e pelo menos uma estratégia não tenha sido verbalizada.

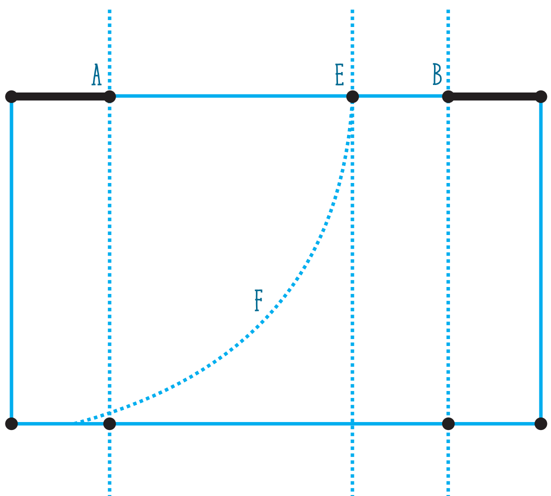
Esta é uma atividade investigativa, em que o "papel" do professor é "muito" importante para guiar a percepção do aluno. Se o professor impõe aos alunos o que quer que eles enxerguem, esses não serão autores da sua aprendizagem. Todo cuidado, na proposição de questionamentos, é pouco.

É por meio da discussão e questionamentos que o professor pode levar seus alunos a explorarem a composição da figura do problema para reconhecer as partes que a compõem. Sem este reconhecimento dos dados geométricos, o aluno não tem condições de elaborar uma estratégia que leve à solução do problema. Começar o trabalho indagando quais são as partes que compõem a Figura II do problema e por que as junções dão certo, conduzindo a construção da figura com dobradura de papel é a proposta apresentada para início da abordagem do problema. Isto pode facilitar a compreensão do problema e a proposição de estratégias de resolução. Deve-se evitar a dica tradicional, na qual já apresenta-se o raciocínio e finaliza a apresentação com uma pergunta "...é assim, não é?".

Este problema tem conexão com o conhecimento desenvolvido nas atividades dos problemas anteriores, e para estabelecer esta conexão, por meio de um olhar para as propriedades geométricas, é importante manipular material concreto para deduzir as propriedades necessárias para resolver o problema.

Um resultado importante que deve ser sistematizado é o reconhecimento de que os dados do problema levam ao fato que o quadrilátero ABCD que é construído dentro do retângulo da Figura I é um quadrado (fato que deve ser provado, utilizando como hipótese os dados do problema).

A seguir apresentamos passos e questionamento para construir um modelo da Figura I com dobradura de papel:



1. Dobrar uma folha de papel retangular de modo a levar o canto inferior esquerdo sobre o lado superior para transferir a medida do lado menor sobre o maior e obter um ponto que denotaremos por E.
2. Obter o ponto médio da parte que sobrou no lado maior, dobrando o vértice superior direito sobre o ponto E, que será denotado por B.
3. Dobrar a folha perpendicularmente ao lado maior do retângulo pelo ponto B.
4. Transferir a medida entre o vértice superior direito e o ponto B, para a outra extremidade superior da folha e, em seguida, fazer a dobra perpendicular ao lado do retângulo, pelo ponto obtido (A).
5. Observar que a figura central obtida, desconsiderando-se os dois retângulos congruentes das extremidades da folha é um quadrado.
6. Dobrar o quadrado pelas diagonais para obter os dois triângulos e os dois pentágonos.

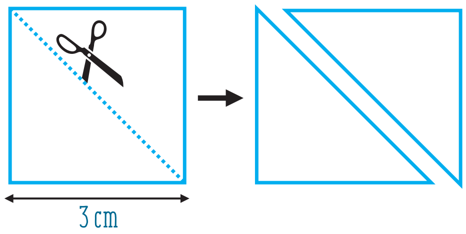
Usando a construção indicada no Anexo C (p. 85) os alunos podem ser instigados a responder os questionamentos a seguir:

- O que estamos usando para garantir a descoberta das medidas que resolvem o problema?
- O buraco sempre existe, ainda que as medidas do retângulo original não tenham sido dadas?
- O problema seria diferente se não houvesse a simetria do segmento AB em relação aos vértices do lado maior?

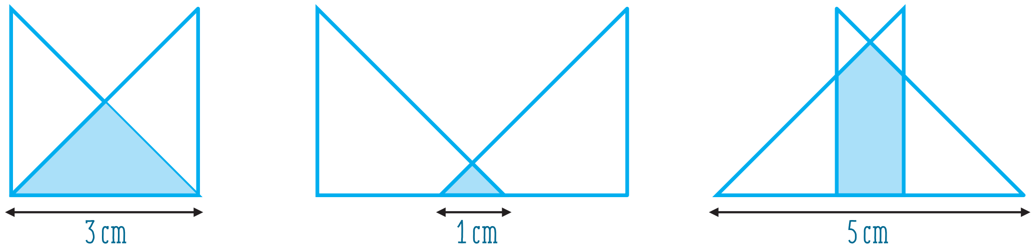
1.8. PROBLEMA 7 – BQ – OBMEP 2012 – QUESTÃO 37 – NÍVEL 1

Este problema complementa o problema 6 e apresenta uma possibilidade de ampliação da investigação inicial sobre as propriedades geométricas envolvidas. Para tanto recomenda-se a apresentação em partes (duas) como estão nos quadros a seguir:

Um quadrado de lado 3cm é cortado ao longo de uma diagonal em dois triângulos como na figura:



Com estes triângulos formamos as figuras dos itens (a), (b) e (c), nas quais destacamos, em azul, a região em que um triângulo fica sobre o outro. Em cada item, calcule a área da região azul.



(a) **(b)** **(c)**

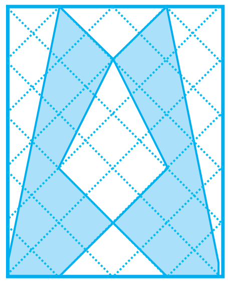
RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A abordagem deste problema deve levar os alunos à compreensão das propriedades geométricas que deve anteceder à compreensão da simbologia algébrica e ao uso de fórmulas. Mais, o uso de fórmulas deve ser a síntese do trabalho realizado, quando a simbologia algébrica estiver revestida de significado para o aluno. Iniciar o trabalho com ênfase no raciocínio geométrico e sem utilizar fórmulas para o cálculo das áreas é de fundamental importância.

Os questionamentos referentes a este problema podem e devem ser explorados a partir do arquivo Problema37_triângulosSobreprosto.ggb (Anexo C, p. 87). A atividade dinâmica permite descobrir e explorar as propriedades geométricas do problema em um quadrado qualquer, ampliando a compreensão do fenômeno.

Ainda, numa abordagem da Geometria pela Geometria e não a partir da algebrização das medidas, propõe-se o seguinte problema:

1.9. PROBLEMA 8 – QUESTÃO 12 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado mede 4cm de largura por 5cm de altura. Qual é a área da região azul?



A figura como proposta não permite a contagem dos quadradinhos, mas a área pode ser obtida facilmente por comparação de partes que compõem uma figura. Como a proposta de trabalho é de abordar a Geometria sem, necessariamente, precisar de medidas para explorar o problema, sugere-se o uso de modelo reproduzido em papel-cartão para recorte (ver material na página 90), levando o aluno à percepção de variadas formas que podem ser produzidas por recortes na figura que permitem adequada sobreposição para comparação de suas áreas. Inicialmente são entregues aos participantes duas cópias da figura - uma para ser recortada e outra para ser usada de base para a sobreposição dos recortes obtidos.

Uma sugestão de sequência das atividades é a seguinte:

1. Propor o recorte de uma das figuras separando as partes brancas das azuis, podendo produzir recortes nas partes de mesma cor. (Uma possibilidade interessante é produzir cortes verticais pelos vértices da figura azul no lado superior do retângulo e pelos vértices de contato entre as figuras azuis.)
2. Solicitar que se sobreponham as partes azuis às brancas, produzindo novos recortes, se necessário.
3. Registrar o que ocorreu e que tipo de recorte os alunos fizeram. Solicitar que os próprios registrem com suas palavras o que fizeram, observaram e concluíram.
4. Sistematizar o conteúdo.

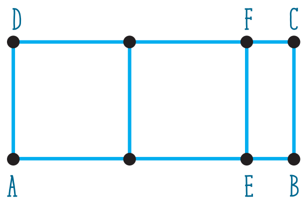
Na sistematização do conteúdo constatar que se uma figura fica dividida em duas que podem ser sobrepostas de alguma forma, então, a área de cada figura resultante é a metade da área da figura original. Dependendo dos cortes produzidos pode-se explorar quais figuras têm a mesma área, com os desdobramentos possíveis, além, é claro, da exploração de simetrias na figura (A dobradura pelo eixo vertical médio mostra perfeita simetria da figura e a percepção de que as partes brancas e azuis podem ser sobrepostas também por simetria axial). A discussão sobre simetrias pode ser conduzida com questões como as apresentadas a seguir:

- Quando falamos que duas figuras são simétricas, quais dados são necessários para definir tal situação?
- O que é eixo de simetria de uma figura?
- O que é um ponto de simetria?
- É possível sobrepor o triângulo branco inferior à figura azul, girando-o no plano, em torno do seu vértice superior?
- Há outras figuras que compõem a figura no retângulo, que podem ser "sobrepostas" por movimentos de giros (rotação)? Identifique e explique.

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Nos questionamentos apresentados é necessário tomar cuidado com a linguagem utilizada e a formalização matemática que deve segui-la. O conceito de isometria (como transformação no plano) e a sua relação com a congruência de figuras deve ser explorado como uma restrição de uma correspondência biunívoca do plano sobre si mesmo que leve à comparação entre duas figuras, e não apenas como regras para comparação de dois triângulos, sem um significado geométrico mais amplo.

Devemos trabalhar claramente a diferença entre o conceito de simetria e o fato de uma figura apresentar simetria de alguma forma. Este conceito é fundamental para a compreensão da atividade proposta. Aqui é essencial abordar os elementos para trabalhar simetrias no plano, e o problema mostra a importância de trabalhar as definições matemáticas para esclarecer conceitos que são aprendidos intuitivamente e precisam de adequada sistematização.

1.10. PROBLEMA 9 – QUESTÃO 8 – NÍVEL 3 – 1ª FASE – OBMEP 2012



A figura mostra um retângulo ABCD decomposto em dois quadrados, e um retângulo BCFE. Quando BCFE é semelhante a ABCD, dizemos que ABCD é um retângulo de prata e a razão AB/AD é chamada razão de prata. Qual é o valor da razão de prata?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: O objetivo principal para o trabalho com este problema é discutir o significado de uma "definição matemática" e sua interpretação. O questionamento deste problema deve levar ao rompimento da ideia comum de que na Matemática os conceitos já estão "definidos" e na sala de aula trabalham-se apenas exemplos e exercícios derivados da matemática "pronta".

Além de trabalhar o que é uma definição, a abordagem deste problema permite compreender o papel da interpretação dos dados para o estabelecimento de estratégias adequadas para sua resolução, incluindo a validação da resposta obtida. O problema foi proposto como Questão 8 da Prova da 1ª Fase da OBMEP 2012, Nível 3, mas o conteúdo matemático envolvido é basicamente semelhança, que é abordado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Este problema propicia oportunidade de trabalhar técnicas algébricas modeladas em uma situação geométrica. A expressão fracionária surge da proporção da semelhança, sendo a ideia subjacente a de comparação, e não de divisão.

Considere a recomendação: Esta atividade "não" deve ser realizada nem com material concreto nem com Geometria Dinâmica. Como pode ser justificada esta recomendação?

Alguns questionamentos para a reflexão do professor sobre este problema:

- Como analisar o uso de uma situação geométrica para resgatar e consolidar o significado de uma expressão fracionária?
- Podemos dizer que a razão de prata é um número racional porque está numa forma fracionária?