

Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Ângulos

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de janeiro de 2016



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Ângulos

Uma região \mathcal{R} do plano é **convexa** se dados quaisquer dois pontos $A, B \in \mathcal{R}$, tivermos $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$. Caso existam pontos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que o segmento de reta \overline{AB} não está inteiramente contido em \mathcal{R} , diremos que a região \mathcal{R} é **não convexa**. Na figura abaixo, temos uma região convexa à esquerda e uma região não convexa à direita.

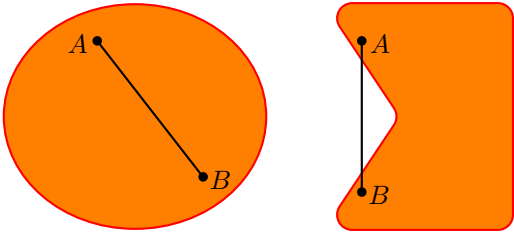


Figura 1: regiões convexa e não convexa.

No plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , de mesma origem O e não opostas, determinam duas regiões, exatamente uma das quais é convexa. Definimos o **ângulo** (ou **ângulo convexo**) $\angle AOB$ como a região convexa do plano delimitada por \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . O ponto O é denominado o **vértice** e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os **lados** do ângulo $\angle AOB$.

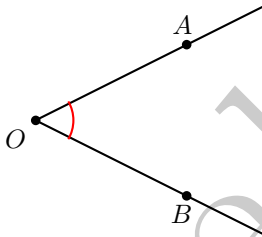


Figura 2: ângulo no plano.

Se \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} forem semirretas opostas, então as regiões em que o plano fica dividido por \overleftrightarrow{AB} são os dois semiplanos definidos pela reta \overleftrightarrow{AB} . Nesse caso, em princípio o **ângulo** $\angle AOB$ poderia ser definido como uma qualquer dessas duas regiões. Porém, se quisermos evitar ambiguidades, podemos marcar um ponto adicional X em um dos dois semiplanos determinados por \overleftrightarrow{AB} e referirmo-nos ao **ângulo** $\angle AOB$ que contém o ponto X .

Ainda no contexto de um ângulo $\angle AOB$, trace um círculo qualquer Λ (lê-se *Lâmbda*) de centro O e o divida em 360 arcos iguais. Se os pontos A e B forem as extremidades de um desses 360 arcos, dizemos que a **medida** de

$\angle AOB$ é 1 **grau**, e denotamos

$$A\hat{O}B = 1^\circ.$$

Como um ângulo de 1° corresponde a um arco que mede $\frac{1}{360}$ do círculo Λ , temos que o círculo completo corresponde a 360° . Daí, por exemplo, se o comprimento de um arco \widehat{AB} é $\frac{1}{8}$ do comprimento de Λ , então a medida de $\angle AOB$ será

$$A\hat{O}B = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ.$$

Veja a figura 3.

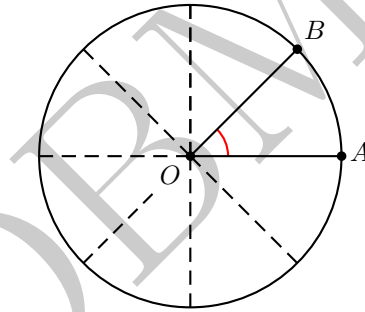


Figura 3: um ângulo $\angle AOB$ de 45° .

Se o comprimento do arco \widehat{AB} é $\frac{1}{4}$ do comprimento do círculo completo, então temos um ângulo $\angle AOB$ cuja medida é $A\hat{O}B = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$. Um ângulo que mede 90° também é chamado de **ângulo reto**.

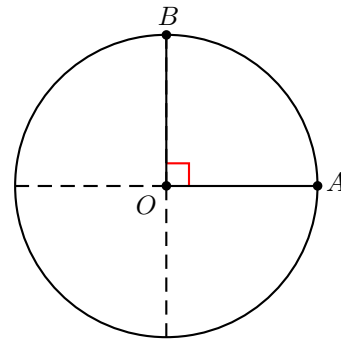


Figura 4: um ângulo reto.

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado nos dois casos acima, se o segmento de reta \overline{AB} é um diâmetro de Λ , então, tendo em vista que os extremos de um diâmetro dividem o círculo em dois arcos de mesmo comprimento, concluímos que o ângulo $\angle AOB$ mede $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Um ângulo que mede 180° é chamado de **ângulo raso**.

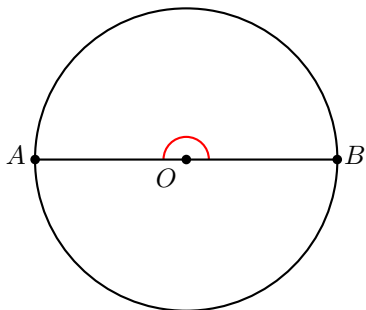


Figura 5: um ângulo raso.

Dizemos que dois ângulos são **congruentes** (ou **iguais**) se suas medidas forem iguais.

Doravante, sempre que for conveniente, utilizaremos as letras gregas minúsculas α , β , θ , etc. para representar medidas de ângulos.

Um ângulo $\angle AOB$ de medida $\widehat{AOB} = \alpha$ é dito **agudo** se $0 < \alpha < 90^\circ$ e **obtusos** se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. As figuras 6 e 7 ilustram ângulos $\angle AOB$ que são respectivamente agudo e obtuso.

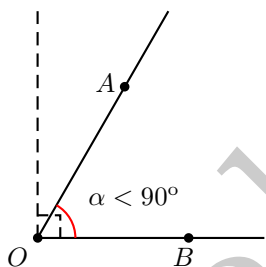


Figura 6: um ângulo agudo $\angle AOB$.

2 Ângulos consecutivos, adjacentes, complementares e suplementares.

Dizemos que dois ângulos são **consecutivos** se possuem um lado em comum. Por exemplo, na figura 8, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são consecutivos.

Observe, contudo, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ da figura 8, apesar de consecutivos, não possuem apenas uma semirreta em comum. De fato, neste caso, temos $\angle BOC \subset$

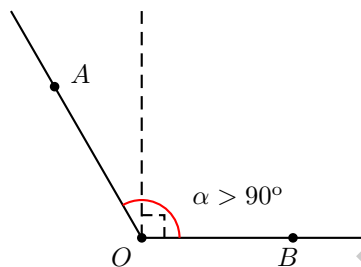


Figura 7: um ângulo obtuso.

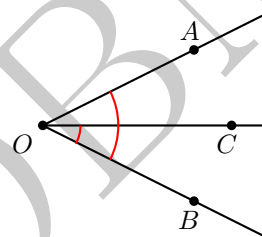


Figura 8: ângulos consecutivos.

$\angle AOB$. Quando dois ângulos consecutivos possuírem apenas uma semirreta em comum, eles serão chamados de ângulos **adjacentes**. Assim, por exemplo, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle BOC$ da figura 9 são (consecutivos e) adjacentes.

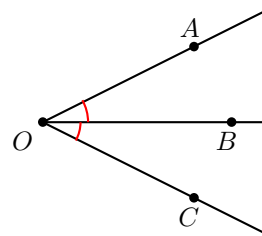


Figura 9: dois ângulos adjacentes.

Dois ângulos de medidas α e β são **complementares** se $\alpha + \beta = 90^\circ$ e **suplementares** se $\alpha + \beta = 180^\circ$. Em palavras, a soma das medidas de dois ângulos complementares é igual à medida de um ângulo reto, ao passo que a soma das medidas de dois ângulos suplementares é igual à medida de um ângulo raso.

Na figura 10, por exemplo, os ângulos adjacentes $\angle AOB$ e $\angle BOC$ são, claramente, complementares.

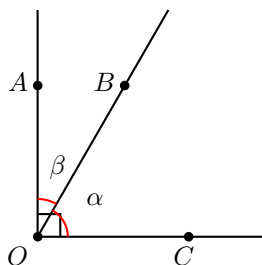


Figura 10: ângulos adjacentes complementares.

Por outro lado, a figura 11 mostra ângulos (também adjacentes) $\angle AOB$ e $\angle BOC$ que são suplementares.

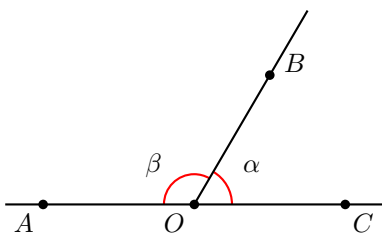


Figura 11: ângulos adjacentes suplementares.

3 Ângulos opostos pelo vértice, bissetriz de um ângulo

Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$, que possuem o mesmo vértice O , são **opostos pelo vértice** (abreviamos **OPV**) se seus lados forem pares de semirretas opostas. Assim, os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da figura 12, haja vista que \vec{OA} e \vec{OC} são semirretas opostas, o mesmo ocorrendo com as semirretas \vec{OB} e \vec{OD} .

Observando a figura 12, concluímos que, uma vez que as semirretas \vec{OA} e \vec{OC} são opostas, o ângulo $\angle AOC$ é raso. Desse modo, os ângulos adjacentes $\angle AOD$ e $\angle DOC$ são suplementares. Daí, segue que

$$\gamma + \beta = 180^\circ.$$

De modo análogo, os ângulos adjacentes $\angle DOA$ e $\angle AOB$

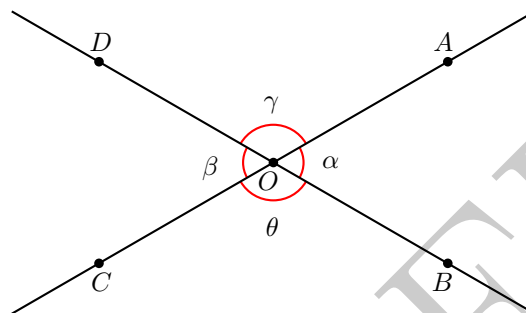


Figura 12: ângulos opostos pelo vértice.

também são suplementares, de forma que

$$\gamma + \alpha = 180^\circ.$$

Em particular, concluímos que $\gamma + \beta = \gamma + \alpha$ e, então, que

$$\beta = \alpha.$$

Analogamente, como $\angle AOD$ e $\angle BOC$ também são OPV, temos que $\gamma = \theta$.

Em palavras, mostramos a seguinte propriedade importante de ângulos OPV:

ângulos OPV possuem medidas iguais.

A **bissetriz** de um ângulo $\angle AOB$ é uma semirreta \vec{OC} que divide $\angle AOB$ em dois ângulos de medidas iguais. Nas notações da figura 13, supondo que $\hat{AOC} = \hat{BOC} = \alpha$, temos que \vec{OC} é a bissetriz de $\angle AOB$.

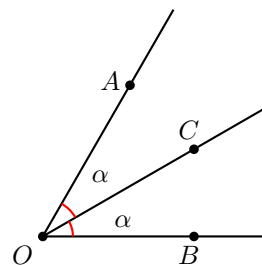


Figura 13: a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

O exemplo a seguir relaciona as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice.

Exemplo 1. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

Prova. Nas notações da figura 14, sejam \vec{OX} e \vec{OY} as bissetrizes dos ângulos opostos pelo vértice $\angle AOB$ e $\angle COD$ (observe que tal figura já utiliza a igualdade das medidas de ângulos OPV).

Então, por um lado, temos

$$X\hat{O}A + A\hat{O}D + D\hat{O}Y = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma.$$

Por outro, temos claramente $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, de forma que $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Então, $\angle XOY$ é um ângulo raso, de forma que \vec{OX} e \vec{OY} são, realmente, semirretas opostas. \square

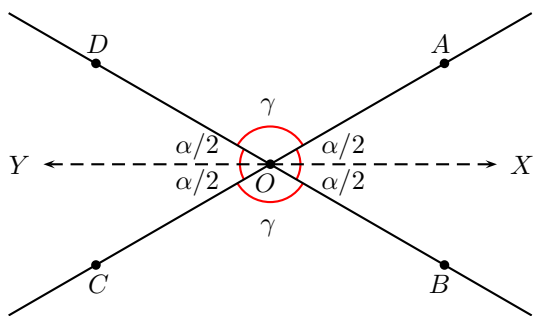


Figura 14: bissetrizes de dois ângulos OPV.

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50min para a primeira seção que compõe esse material, e uma seção adicional de 50min para as outras duas seções. Na seção 1, procure destacar os conceitos de região convexa e não convexa, para que o conceito de ângulo convexo seja bem entendido. Na seção 2, utilize desenhos para ilustrar que a união de dois ângulos adjacentes e complementares forma um ângulo reto, enquanto a união de dois ângulos adjacentes e suplementares forma um ângulo raso. Finalmente, na seção 3, é muito importante que os alunos compreendam que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. Esse fato será utilizado várias vezes em aulas posteriores.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.