

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Teorema do Valor Médio - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de Setembro de 2025



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta aula, apresentaremos um importante resultado, equivalente ao Teorema do Valor Médio: o *Teorema de Rôlle*. Após enunciarmos e demonstrarmos esse teorema na Seção 1, discutiremos diversas aplicações nos exemplos da Seção 2.

1 O Teorema de Rôlle

A proposição que dá nome à seção afirma em palavras que, se o gráfico de uma função derivável admitir uma *corda horizontal*, então, em algum ponto do intervalo que define essa corda, a reta tangente ao gráfico também será horizontal. Mais precisamente,

Teorema 1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, a qual é derivável no intervalo aberto (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prova. Pelo teorema dos valores extremos¹, f assume valores mínimo m e máximo M no intervalo $[a, b]$.

Se esses valores forem assumidos nos extremos a e b , a hipótese $f(a) = f(b)$ garantirá $m = M$, de sorte que f será constante. Daí, valerá $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$, encerrando a demonstração.

Caso algum desses valores extremos não seja assumido em a ou b , tal valor deverá ser assumido em um ponto c do intervalo (a, b) . Pela observação 6 da aula *Propriedades - Parte III*, do módulo *Derivada como Função*, segue a relação $f'(c) = 0$. $\square$

2 Exemplos

Sejam I um intervalo, $k \geq 2$ um número natural e $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ pontos de I que anulam uma função derivável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então, em cada intervalo aberto (x_i, x_{i+1}) , $1 \leq i \leq k - 1$, há pelo menos um zero da derivada f' . Isso segue

¹Confira o Teorema 9 da aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*, do módulo *Funções Contínuas*.

imediatamente do teorema de Rôlle, onde a hipótese “ f é derivável” e as igualdades $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$ permitem concluir a existência de um ponto $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f'(c_i) = 0$.

Da discussão acima segue que, *se uma função derivável admitir $k + 1$ zeros distintos em um subintervalo de seu domínio, então sua função derivada admitirá pelo menos k zeros no interior desse mesmo subintervalo.*

O próximo exemplo refina a observação do parágrafo anterior no caso em que a função f é polinomial. Antes, vale recordar que, se α for raiz de um polinômio P , então α será raiz de multiplicidade $k \geq 1$ de P se, e só se, α for raiz de multiplicidade $k - 1$ do polinômio derivado P' ².

Vale também recordar que um polinômio P de grau n admite exatamente n raízes complexas, repetidas de acordo com suas multiplicidades; esse é o conteúdo do Teorema Fundamental da Álgebra, cuja demonstração pode ser encontrada na Seção 3.3 da referência [3].

Exemplo 2. *Se todas as raízes complexas de um polinômio P forem reais, então todas as raízes complexas do polinômio derivada P' também serão reais.*

Solução. Seja P um polinômio de coeficientes reais e grau $n \geq 1$, satisfazendo a hipótese do enunciado. A solução estará completa quando mostrarmos que P' admite, contadas as multiplicidades, $n - 1$ raízes reais.

Se todas as raízes de P forem iguais a um certo número real α , então $P(x) = a(x - \alpha)^n$ para um certo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo, $P'(x) = na(x - \alpha)^{n-1}$. Assim, α será raiz de multiplicidade $n - 1$ de P' e a solução estará encerrada.

Caso P admita pelo menos duas raízes reais distintas, sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ as raízes distintas de P . Se m_i for a multiplicidade da raiz x_i para $1 \leq i \leq k$, teremos

$$P(x) = a(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k},$$

²Confira o exemplo 14 da aula *Propriedades - Parte II*, do módulo *Derivada como Função*.

para um certo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; como P tem grau n , vale a relação

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Pela discussão anterior ao exemplo, existem $k - 1$ raízes distintas $c_1, \dots, c_{k-1}$ de P' , com $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ para cada $1 \leq i \leq k - 1$. Além disso, o fato de x_i ser raiz de multiplicidade $m_i - 1$ de P' (também observado na discussão que antecede a prova), garante que P' tem, contadas com suas multiplicidades, pelo menos

$$(k - 1) + (m_1 - 1) + \dots + (m_k - 1) = (k - 1) + (n - k) \\ = n - 1$$

raízes reais. Como P' não pode ter mais que $n - 1$ raízes reais, concluímos que todas as raízes de P' são reais. $\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, note que as raízes de P' pertencem ao conjunto $\{x_1, \dots, x_k, c_1, \dots, c_{k-1}\}$. No entanto, o ponto x_i deve ser omitido da lista de raízes de P' sempre que $m_i = 1$; por outro lado, cada c_i é, necessariamente, uma raiz *simples* de P' .

Seja P um polinômio real, não constante, cujas raízes são todas reais. Conforme comentamos acima, cada raiz de P' , que não for raiz de P , deve ser uma raiz *simples* de P' . De outro modo, todas as raízes de multiplicidade maior que ou igual a 2 de P' também devem ser raízes de P . Daí, segue o

Exemplo 3. *Seja P um polinômio real e não constante. Se existir $a \in \mathbb{R}$ com $P(a) \neq 0$, mas $P'(a) = P''(a) = 0$, então P possui uma raiz em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Prova. Observe que a é uma raiz de multiplicidade maior que ou igual a 2 de P' , devido à condição $P'(a) = P''(a) = 0$. Daí, se todas as raízes de P fossem reais, os comentários anteriores ao exemplo garantiriam que $P(a) = 0$, contradizendo a hipótese. $\square$

Exemplo 4. *Considere o polinômio real de grau 4*

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Se $3b^2 < 8ac$, mostre que P admite no máximo duas raízes reais distintas.

Prova. Pela discussão do início desta seção, se P admitisse pelo menos três raízes reais distintas, então P' admitiria pelo menos duas raízes reais distintas. Iterando o argumento, seguiria que $P'' = (P')'$ possuiria pelo menos uma raiz real, o que não é verdade. Com efeito, a segunda derivada de P é o polinômio quadrático

$$P''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c,$$

cujo discriminante

$$\Delta = (6b)^2 - 4(12a)(2c) = 12(3b^2 - 8ac)$$

é negativo, por hipótese.

Portanto, P'' não admite raízes reais, de modo que o argumento acima assegura que P deve possuir, no máximo, duas raízes reais distintas. $\square$

Exemplo 5. Mostre que a equação $x^2 = x \sin x + \cos x$ tem exatamente duas raízes reais.

Prova. Seja f a função real de uma variável real cuja regra é $f(x) = x^2 - (x \sin x + \cos x)$. Então, as raízes (reais) da equação dada correspondem aos zeros de f .

Como

$$f'(x) = 2x - (\cancel{\sin x} + x \cos x - \cancel{\sin x}) = x(2 - \cos x)$$

e $2 - \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que 0 é o único ponto crítico de f , ou seja,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Pelo teorema de Rôlle, f admite no máximo dois zeros. Realmente, se $a < b < c$ fossem zeros de f , haveria um zero de f' em cada um dos intervalos (a, b) , (b, c) , o que é impossível.

Por fim, precisamos verificar que f tem *pelo menos* dois zeros. Com efeito, as relações

$$f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 > -1 = f(0)$$

garantem, via TVI, a existência de pelo menos um zero de f em cada um dos intervalos $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$. $\square$

Em relação ao próximo exemplo, uma espécie de generalização do teorema de Rôlle, lembre-se de que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **de classe C^0** se for contínua e, para $k \geq 1$ inteiro, **de classe C^k** se for k vezes derivável e sua k -ésima derivada, $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$, for contínua.

Exemplo 6. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n-1} , n vezes derivável no intervalo aberto (a, b) . Suponha que*

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0.$$

Prove que $f^{(n)}(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.

Prova. Façamos indução em $n \in \mathbb{N}$.

O caso $n = 1$ é verdadeiro, por uma aplicação direta do Teorema de Rôlle. Realmente, nesse caso as hipóteses são que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, derivável no intervalo aberto (a, b) , com $f(a) = f(b) = 0$; por outro lado, a tese é que $f'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.

Assumindo a validade do resultado para um certo natural n , suponhamos que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) = f(b) = 0,$$

sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^n , a qual é $n + 1$ vezes derivável no intervalo aberto (a, b) .

Pela hipótese de indução, vale $f^{(n)}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in (a, b)$. Daí, as igualdades $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(x_0) = 0$ acarretam, via Teorema de Rôlle (aplicado a $f^{(n)}$), a existência de $c \in (a, x_0)$ tal que $f^{(n+1)}(c) = (f^{(n)})'(c) = 0$. A indução está, pois, completa. $\square$

Exemplo 7. *Mostre que, para cada n natural, a equação*

$$e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} = 0$$

possui uma única solução real.

Solução. Certamente, 0 é uma solução. Em verdade, definindo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!},$$

é fácil verificar que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Portanto, se houvesse uma outra solução b da equação proposta, isto é, se tivéssemos $f(b) = 0$ para algum $b \neq 0$, o exemplo anterior implicaria a existência de um real x_0 tal que $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

Por outro lado, temos $f = \exp - g$, em que g é um polinômio de grau n . Daí, $g^{(n+1)} \equiv 0$, de modo que

$$f^{(n+1)} = \exp^{(n+1)} - g^{(n+1)} = \exp,$$

o que gera uma contradição: a exponencial nunca se anula, ao passo que $f^{(n+1)}$ teria um zero em x_0 .

Assim, 0 é a *única* solução da equação proposta. $\square$

Exemplo 8 (Leningrado 1991 - adaptado). *Seja n um inteiro positivo. Dados quatro números reais $a < b < c < d$, mostre que existem dois desses números, x e y digamos, tais que*

$$x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n \neq 1.$$

Prova. Suponhamos, por contradição, que ocorra

$$x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n = 1$$

para quaisquer $x, y \in \{a, b, c, d\}$ distintos.

Afirmamos que o polinômio $P(X) = X^{n+1} - X$ satisfaz $P(a) = P(b) = P(c) = P(d)$. Com efeito, se x, y forem números distintos dentre a, b, c, d , a relação acima, quando multiplicada por $x - y$, dá

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x - y,$$

o que equivale a $P(x) = P(y)$.

Pelo Teorema de Rôlle, a derivada de P se anula em cada um dos intervalos (a, b) , (b, c) , (c, d) , de onde segue que

a equação $P'(x) = 0$ admite pelo menos três raízes reais distintas.

Porém, essa última conclusão é falsa. De fato, temos $P'(x) = (n+1)x^n - 1$, de sorte que $P'(x) = 0$ se, e somente se, $x^n = 1/(n+1)$. Quando n é par (resp. ímpar), essa equação possui exatamente duas (resp. uma) solução, de onde se vê que a equação $P'(x) = 0$ não admite mais que duas soluções. $\square$

Exemplo 9. Prove que o n -ésimo polinômio de Legendre,

$$L_n(x) := \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

possui n raízes distintas no intervalo $(-1, 1)$.

Solução. Observando que $(x^2 - 1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$, vemos que o polinômio $P(x) := (x^2 - 1)^n$, de grau $2n$, admite exatamente duas raízes distintas, -1 e 1 , sendo a multiplicidade de cada uma delas igual a n .

Assim, para cada $1 \leq m \leq n$, temos que -1 e 1 são raízes de multiplicidade $n - m$ da m -ésima derivada $P^{(m)}$ de P . Adicionalmente, afirmamos que $P^{(m)}$ admite m raízes distintas no intervalo aberto $(-1, 1)$.³ Façamos essa verificação por indução em $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Para $m = 1$, temos

$$P'(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1} = 2nx(x+1)^{n-1}(x-1)^{n-1},$$

de forma que 0 é uma raiz de P' em $(-1, 1)$.

Agora, supondo que a afirmação do penúltimo parágrafo seja verdadeira para um certo m , com $1 \leq m < n$, segue que $P^{(m)}$ admite $m + 2$ raízes distintas no intervalo $[-1, 1]$. Pelo Teorema de Rôlle, entre quaisquer duas raízes consecutivas de $P^{(m)}$ há alguma raiz de seu polinômio derivado, de sorte que $P^{(m+1)} = (P^{(m)})'$ possui $m + 1$ raízes distintas no intervalo aberto $(-1, 1)$.

³Assim, contando multiplicidades, seguirá que $P^{(m)}$ possui *exatamente* m raízes distintas em $(-1, 1)$ e que todas elas são simples.

Como caso particular da proposição mais geral provada acima, temos que, para $m = n$, o n -ésimo polinômio de Legendre $L_n = P^{(n)}$ admite n raízes distintas no intervalo aberto $(-1, 1)$. $\square$

Exemplo 10 (IMC - 2023). *Seja V o conjunto das funções contínuas $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, deriváveis em $(0, 1)$, tais que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Determine todos os $a \in \mathbb{R}$ tais que, para toda $f \in V$, exista algum $c \in (0, 1)$ satisfazendo*

$$f(c) + a = f'(c).$$

Solução. Afirmando que $1/(e-1)$ é o único número a com a propriedade requerida.

Com efeito, seja a um número satisfazendo as condições do enunciado. Se $f(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$, $0 \leq x \leq 1$, então $f \in V$ e deve existir $c \in (0, 1)$ tal que

$$a = f'(c) - f(c) = \frac{1}{e - 1}.$$

Para provar que $1/(e-1)$ realmente serve para toda $f \in V$ dada, considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{(e-1)f(x) + 1}{(e-1)e^x}.$$

Então, g é contínua, derivável em $(0, 1)$ e

$$g(0) = \frac{1}{e-1} = g(1).$$

Pelo Teorema de Rôlle, vale $g'(c) = 0$ para algum $c \in (0, 1)$, em que

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x) - \frac{1}{e-1}}{e^x},$$

se $0 < x < 1$. Daí,

$$f'(c) - f(c) - \frac{1}{e-1} = 0,$$

ou seja, $f(c) + \frac{1}{e-1} = f'(c)$. Isso demonstra a afirmação feita no início e conclui a solução. $\square$

Para o próximo exemplo, é útil elaborarmos alguns preliminares; fazemos isso no lema a seguir e em seu corolário.

Lema 11. *Sejam $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis definidas no intervalo I , $a \in I$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $I \setminus \{a\}$, convergindo para a e tal que $f(x_n) = g(x_n)$ para cada natural n . Então, existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em $I \setminus \{a\}$, convergindo para a e tal que $f'(y_n) = g'(y_n)$ para cada n .*

Prova. Uma vez que $x_n \neq a$, para todo n , há uma infinidade de termos $x_n < a$ ou uma infinidade de termos $x_n > a$. Suponhamos, sem perda de generalidade, a ocorrência do segundo caso. Para simplificar a notação, a subsequência de (x_n) constituída pelos termos maiores que a ainda será denotada por (x_n) , o que permite escrever $x_n > a$ para todo natural n .

Isso posto, ponha $k_1 = 1$. Como $x_n \rightarrow a$, existe um índice k_2 tal que $x_{k_2} \in (a, x_{k_1})$; em particular, $k_2 \neq k_1 = 1$, logo, $k_2 > k_1$. Da mesma forma, como $x_n \rightarrow a$, podemos tomar um índice $k_3 > k_2$ tal que $x_{k_3} \in (a, x_{k_2})$; em seguida, tomamos um índice $k_4 > k_3$ tal que $x_{k_4} \in (a, x_{k_3})$ e assim por diante.

Dessa forma, construímos uma subsequência decrescente $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ademais, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite, segue que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = a$.

Como $f(x_n) = g(x_n)$ para cada n natural, temos

$$(f - g)(x_{k_j}) = (f - g)(x_{k_{j+1}})$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, o Teorema de Rôlle garante a existência de $y_j \in (x_{k_{j+1}}, x_{k_j})$ satisfazendo $(f - g)'(y_j) = 0$, isto é, $f'(y_j) = g'(y_j)$. Sendo $a < x_{k_{j+1}} < y_j$, temos, em particular, $y_j \neq a$ para todo j . Além disso, o fato de $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergir para a garante, de acordo com as desigualdades $a < y_j < x_{k_j}$, a validade de $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = a$, terminando a demonstração. $\square$

Corolário 12. *Nas hipóteses do lema anterior, suponha, em adição, que f e g sejam funções suaves. Então, as derivadas*

de f e g no ponto a coincidem em todas as ordens, ou seja, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ para todo $k \geq 0$.

Prova. Com efeito, fixado $k \geq 0$, podemos iterar k vezes a conclusão do lema 11 a fim de garantir a existência de uma sequência (y_n) de pontos em $I \setminus \{a\}$, convergindo para a e tal que $f^{(k)}(y_n) = g^{(k)}(y_n)$ para cada natural n . Portanto, a continuidade das derivadas $f^{(k)}$ e $g^{(k)}$ dá

$$f^{(k)}(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(k)}(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{(k)}(y_n) = g^{(k)}(a),$$

como desejado. □

Exemplo 13 (Putnam - 1992). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, calcule as derivadas $f^{(k)}(0)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Solução. Definindo $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vemos que g é uma função suave satisfazendo $g(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$, para cada n natural. Pelo corolário 12, obtemos $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ para cada $k \geq 0$. Dessa forma, a solução estará encerrada quando calcularmos as derivadas de g na origem. Faremos isso por meio da

Afirmção:

- (i) As derivadas de ordem ímpar de g na origem são nulas.
- (ii) As derivadas de ordem par de g na origem se calculam pela fórmula

$$g^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!,$$

para todo inteiro não negativo k .

Realmente, como g é uma função (suave) par, suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares, o que implica o item (i), já que uma função ímpar se anula na origem.

Quanto ao item (ii), a fórmula vale para $k = 0$, pois $g(0) = 1$. Se k for um inteiro positivo, observe que

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots,$$

por conta da fórmula da soma de uma PG infinita cuja razão tem módulo menor que 1. Desse modo, podemos escrever

$$g(x) = p(x) + (-1)^k x^{2k} + (-1)^{k+1} x^{2(k+1)} g(x), \quad (1)$$

em que $p(x) = 1 - x^2 + \dots + (-1)^{k-1} x^{2(k-1)}$.

Sendo p um polinômio de grau menor que $2k$, vem que $p^{(2k)} \equiv 0$. Por outro lado, as derivadas na origem, até a ordem $2k$, da função polinomial $x \mapsto (-1)^{k+1} x^{2(k+1)}$ são todas nulas. Daí, a observação anterior ao exemplo 7 da aula *Regra da Cadeia - Exercícios - Parte II* assegura que também são nulas na origem as derivadas, até a ordem $2k$, da função $x \mapsto (-1)^{k+1} x^{2(k+1)} g(x)$. Pelo exposto, a relação (1) faz concluir que a derivada de ordem $2k$ na origem da função g nada mais é que a derivada de ordem $2k$ na origem da função polinomial $x \mapsto (-1)^k x^{2k}$, qual seja, $(-1)^k (2k)!$. $\square$

Dicas para o Professor

Na terceira parte desse material, o Teorema de Rôlle será utilizado para demonstrar um resultado fundamental do cálculo diferencial, o qual intitula a aula: o *Teorema do Valor Médio* (TVM). Nesse sentido, chamamos a atenção do leitor para o exemplo 6, uma vez que a proposição lá enunciada permite uma poderosa generalização do TVM, conhecida na literatura como *Fórmula de Taylor com resto de Lagrange*. Por sua vez, deveremos abordar tal generalização em uma aula futura.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. R. Gelca e T. Andreescu. *Putnam and Beyond*, 2^a ed. Springer Nature, Cham, 2017.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. *Introdução à Análise*. 3^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 6. *Polinômios*. 2^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.