Material Teórico - Módulo Problemas Envolvendo Áreas

Problemas Envolvendo Áreas - Parte 2

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

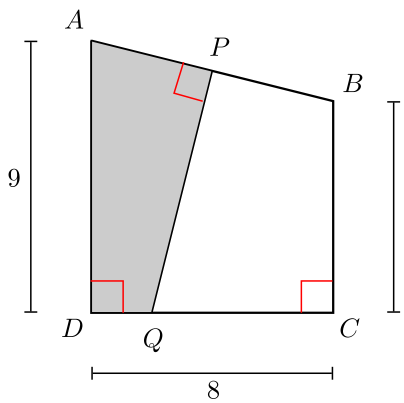
25 de fevereiro de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Problemas envolvendo áreas

Neste material, apresentamos mais alguns problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas.

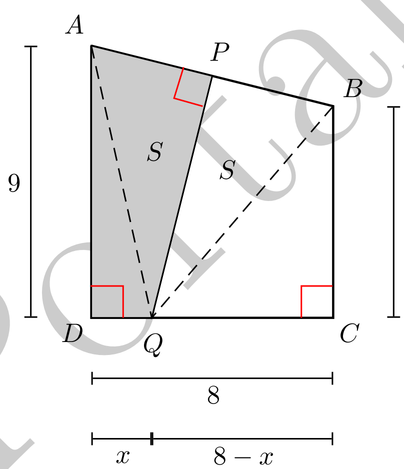
Exemplo 1. *Na figura abaixo, $ABCD$ é um trapézio cujas bases medem 7 e 9 e cuja altura mede 8. Calcule a área do quadrilátero $APQD$, sabendo que P é o ponto médio do lado AB.*



Solução. Iniciamos calculando a área do trapézio $ABCD$:

$$[ABCD] = \frac{(9+7)\cdot 8}{2} = 64.$$

Agora, veja que $\overline{AQ} = \overline{QB}$, pois PQ é mediatriz do segmento AB. Logo, se denotarmos $\overline{DQ} = x$, teremos $\overline{QC} = 8 - x$ (veja a figura abaixo).



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos APQ e BPQ, obtemos

$$x^2 + 9^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{QB}^2 = (8-x)^2 + 7^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \cancel{x^2} + 9^2 = \cancel{x^2} - 16x + 64 + 49 &\Longrightarrow 16x = 32 \\ &\Longrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Assim, $[ADQ] = \frac{2\cdot 9}{2} = 9$ e $[BCQ] = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$. Por fim, denotando $[APQ] = [BPQ] = S$, obtemos:

$$\begin{aligned} 64 = [ABCD] &= [ADQ] + [BCQ] + [APQ] + [BPQ] \\ &= 9 + 21 + 2S \\ &= 30 + 2S. \end{aligned}$$

Logo, $Y = 17$. Finalmente, obtemos

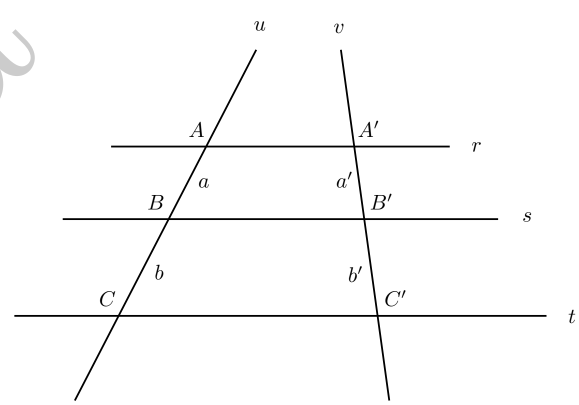
$$[APQD] = [ADQ] + [APQ] = 9 + 17 = 26.$$

□

No próximo exemplo, reobtemos o Teorema de Tales a partir de propriedades conhecidas sobre áreas de triângulos.

Exemplo 2. *Na figura abaixo, r, s e t são retas paralelas, cortadas pelas transversais u e v. Se $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{A'B'} = a'$ e $\overline{B'C'} = b'$. Prove que*

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$



Prova. Uma propriedade já estudada sobre áreas de triângulos diz que, se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre as medidas de suas bases. Aplicando essa propriedade aos triângulos $AB'B$ e $CB'B$ (os quais têm alturas iguais a partir de B'), obtemos:

$$\frac{[AB'B]}{[CB'B]} = \frac{a}{b}.$$

Aplicando a mesma propriedade, agora aos triângulos $A'BB$ e $C'BB'$ (que têm alturas iguais a partir de B), obtemos:

$$\frac{[A'BB]}{[C'BB']} = \frac{a'}{b'}.$$

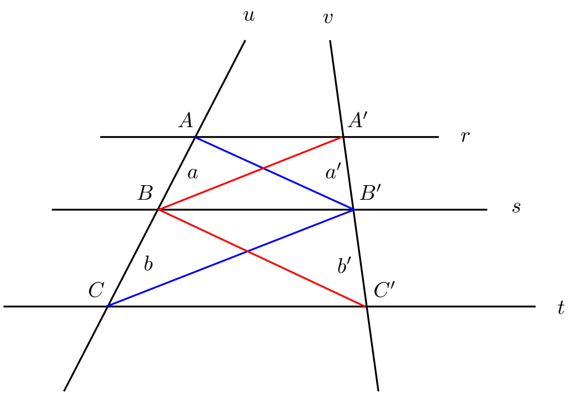
Por outro lado, como r e s são retas paralelas e os triângulos ABB' e $A'BB'$ possuem a mesma base BB' e terceiros vértices sobre r, temos $[ABB'] = [A'BB']$ (veja a próxima figura). Analogamente, temos $[CBB'] = [C'BB']$. Portanto,

$$\frac{[ABB']}{[CBB']} = \frac{[A'BB']}{[C'BB']}.$$

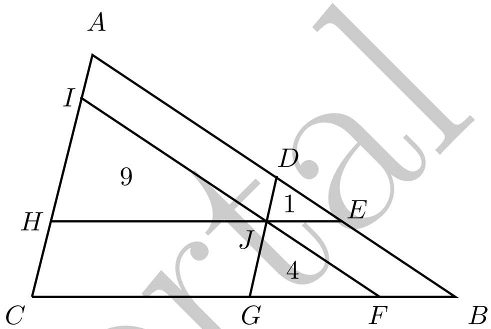
Por fim, substituindo as expressões obtidas anteriormente para os dois membros da igualdade acima, chegamos a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

□



Exemplo 3. *Na figura abaixo, os segmentos DG, EH e FI são paralelos aos lados do triângulo ABC. Além disso, $[DEJ] = 1$, $[JFG] = 4$ e $[IJH] = 9$. Calcule a área do triângulo ABC.*



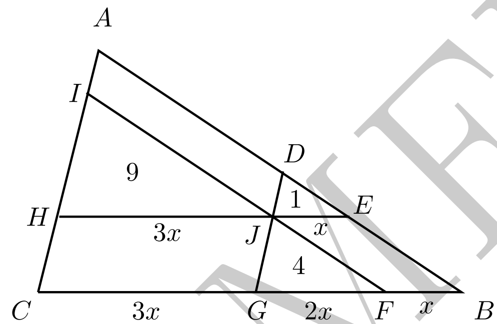
Solução. Uma vez que DG, EH e FI são paralelos aos lados do triângulo ABC, temos que os triângulos DEJ, JFG, IJH e ABC têm ângulos internos respectivamente, iguais; logo, são dois a dois semelhantes.

Denotemos $\overline{EJ} = x$. Lembrando que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, podemos escrever (acompanhe o raciocínio na figura a seguir):

$$\left(\frac{\overline{FG}}{\overline{EJ}}\right)^2 = \frac{[JFG]}{[DEJ]} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{\overline{FG}}{x} = 2 \Rightarrow \overline{FG} = 2x$$

e, analogamente,

$$\left(\frac{\overline{HJ}}{\overline{EJ}}\right)^2 = \frac{[IJH]}{[DEJ]} = \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{\overline{HJ}}{x} = 3 \Rightarrow \overline{HJ} = 3x.$$

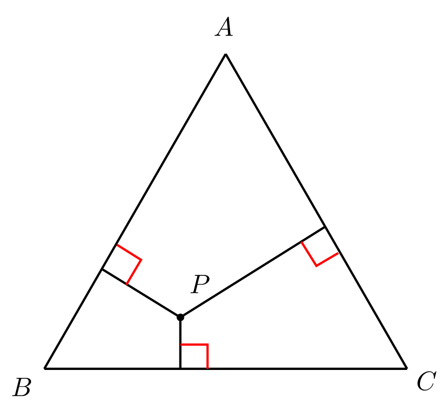


Além disso, $CGJH$ e $FBEJ$ são paralelogramos, logo, $\overline{CG} = \overline{HJ} = 3x$ e $\overline{BF} = \overline{EJ} = x$. Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{CG} + \overline{FG} + \overline{BF}\\ &= 3x + 2x + x\\ &= 6x.\end{aligned}$$

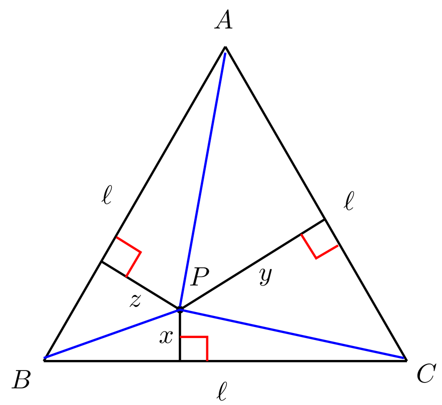
Para finalizar, basta observar que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e DEJ é igual a $\frac{6x}{x} = 6$. Portanto, a razão entre suas áreas é $6^2 = 36$, ou seja, $[ABC] = 36 \cdot [DEJ] = 36$. □

Exemplo 4. *Se ABC é um triângulo equilátero e P é um ponto qualquer em seu interior, mostre que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é constante (isto é, não depende da posição de P).*



Prova. Denotando por ℓ a medida dos lados do triângulo ABC e por x, y e z, respectivamente, as distâncias de P aos lados BC, AC e AB (veja a próxima figura), temos

$$[PBC] = \frac{1}{2} \cdot x\ell, \quad [PAC] = \frac{1}{2} \cdot y\ell \;\text{ e }\; [PAB] = \frac{1}{2} \cdot z\ell.$$



Por outro lado, veja que a área de ABC é igual à soma das áreas dos triângulos PBC, PAC e PAB. Assim,

$$\begin{aligned}[ABC] &= [PBC] + [PAC] + [PAB]\\ &= \frac{1}{2}\cdot x\ell + \frac{1}{2}\cdot y\ell = \frac{1}{2}\cdot z\ell\\ &= \frac{1}{2}\cdot \ell\cdot (x+y+z),\end{aligned}$$

de sorte que

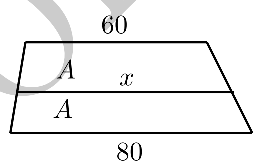
$$x + y + z = \frac{2[ABC]}{\ell}. \qquad (1)$$

A igualdade acima já garante que a soma das distâncias de P aos lados de ABC não depende da posição de P. Entretanto, denotando as alturas de ABC por h e substituindo $[ABC] = \frac{1}{2}\cdot \ell h$ em (1), obtemos

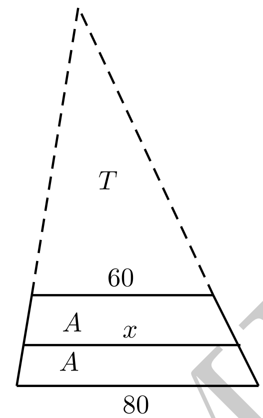
$$x + y + z = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\ell}h}{\cancel{\ell}} = h.$$

□

Exemplo 5. *Os irmãos Juarez e Hosana receberam de herança um terreno em forma de trapézio (ilustrado na figura abaixo, com comprimentos dados em metros) e desejam dividi-lo em duas partes iguais, construindo uma cerca paralela às bases. Qual deve ser o comprimento dessa cerca, aproximadamente?*



Solução. Prolongando os lados não paralelos do trapézio até que eles se encontrem, obtemos um triângulo, formado pelos dois prolongamentos e pela base menor do trapézio (veja a próxima figura). Denotaremos a área desse triângulo por T.



Utilizando o fato de que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, juntamente com as propriedades elementares de proporções, obtemos:

$$\frac{T}{T+A} = \frac{60^2}{x^2} \Longrightarrow \frac{T}{A} = \frac{3600}{x^2 - 3600}$$

e

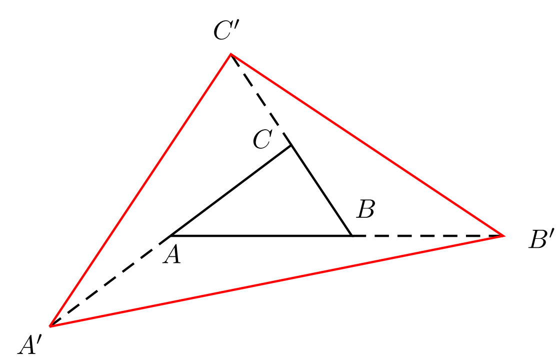
$$\begin{aligned}\frac{T}{T+2A} = \frac{60^2}{80^2} &\Longrightarrow \frac{T}{2A} = \frac{3600}{6400-3600} = \frac{3600}{2800} = \frac{9}{7}\\ &\Longrightarrow \frac{T}{A} = \frac{18}{7}.\end{aligned}$$

Igualando os dois valores de $\frac{T}{A}$ obtidos acima, temos:

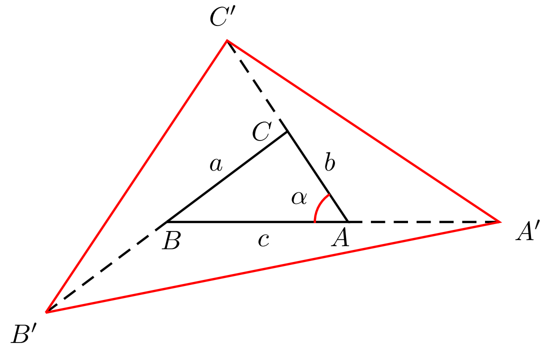
$$\begin{aligned}\frac{3600}{x^2-3600} = \frac{18}{7} &\Longrightarrow x^2 - 3600 = \frac{7\cdot 3600}{18}\\ &\Longrightarrow x^2 = 3600 + 7\cdot 200\\ &\Longrightarrow x^2 = 5000\\ &\Longrightarrow x = \sqrt{5000} \cong 70,71.\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da cerca deve ser, aproximadamente, $70,71$m. □

Exemplo 6. *Na figura abaixo, ABC é um triângulo de área igual a 1. Além disso, A', B' e C' são pontos sobre os prolongamentos dos lados AC, AB e BC, respectivamente, tais que $\overline{AA'} = \overline{AC}$, $\overline{BB'} = \overline{AB}$ e $\overline{CC'} = \overline{BC}$. Calcule a área do triângulo $A'B'C'$.*



Solução. Denotemos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $B\widehat{A}C = \alpha$ (veja a figura).



Aprendemos em módulos anteriores que a área de ABC pode ser dada por

$$[ABC] = \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}.$$

Por outro lado, sabemos (também de módulos anteriores) que $\operatorname{sen}(180^o - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$. Assim, uma vez que $A'\widehat{A}C' = 180^o - \alpha$, $\overline{AA'} = c$ e $\overline{AC'} = 2b$, temos que

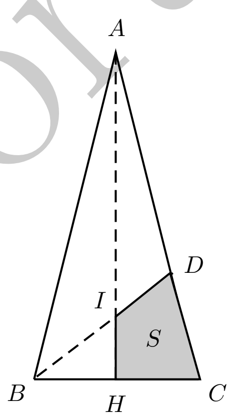
$$\begin{aligned} [AA'C'] &= \frac{c \cdot 2b \cdot \operatorname{sen}(180^o - \alpha)}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \\ &= 2[ABC] = 2. \end{aligned}$$

O raciocínio empregado acima, com o qual concluímos que $[AA'C'] = 2$, pode ser repetido para mostrar que $[BB'A'] = 2$ e $[CC'B'] = 2$. Portanto, obtemos:

$$\begin{aligned} [A'B'C'] &= [ABC] + [AA'C'] + [BB'A'] + [CC'B'] \\ &= 1 + 2 + 2 + 2 = 7. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7. *Na figura, ABC é um triângulo isósceles tal que $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\overline{BC}$, I é o incentro de ABC e $[ABC] = 60$. Calcule a área S da região pintada de cinza.*

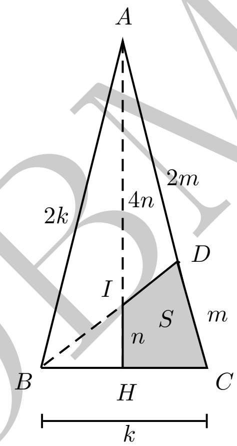


Solução. Denotando $\overline{BC} = k$, temos $\overline{AB} = \overline{AC} = 2k$. Agora, veja que BD é bissetriz de $\angle ABC$. Logo, denotando $\overline{HI} = n$, $\overline{CD} = m$ e utilizando o Teorema da Bissetriz Interna (acompanhe na figura a seguir), obtemos:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{2k}{k/2} = 4 \Rightarrow \overline{AI} = 4\,\overline{HI} = 4n$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2k}{k} = 2 \Rightarrow \overline{AD} = 2\,\overline{CD} = 2m.$$



Além disso, utilizando mais uma vez o fato de que se dois triângulos têm a mesma altura então a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases, obtemos

$$\frac{[BAD]}{[BCD]} = \frac{2m}{m} = 2;$$

mas, como $[BAD] + [BCD] = [ABC] = 60$, segue que $[BAD] = 40$ e $[BCD] = 20$.

De modo análogo, obtemos

$$\frac{[ABI]}{[BHI]} = \frac{4n}{n} = 4;$$

então, $[ABI] + [BHI] = [ABH] = \frac{1}{2}[ABC] = 30$ acarreta $[ABI] = 24$ e $[BHI] = 6$.

Mas, $[AID] = [ABD] - [ABI] = 40 - 24 = 16$. Portanto,

$$\begin{aligned} [AID] + S = \frac{1}{2} \cdot [ABC] = 30 &\Longrightarrow 16 + S = 30 \\ &\Longrightarrow S = 14. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas ou três sessões de 50min para expor todos os exemplos que compõem este material. Antes de apresentar as soluções dos problemas, é fundamental que os alunos disponham de algum tempo para tentar resolvê-los sozinhos. Caso eles não consigam, o professor pode dar dicas parciais e incentivar a procura pelas soluções. Os alunos que conseguirem resolver algum problema sozinhos devem ser encorajados a apresentarem suas ideias para o restante da turma, na lousa.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana.* São Paulo, Editora Atual, 2013.