Material Teórico - Módulo Equações Algébricas-Propriedades das Raízes

Raízes e Multiplicidade

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de agosto de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

1 Raízes e multiplicidade

Pode-se dizer que o teorema mais importante de toda a Álgebra (e mesmo um dos teoremas mais importantes em Matemática) é o seguinte resultado de Gauss:

> **Teorema Fundamental da Álgebra**: todo polinômio de coeficientes complexos e grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra* foge do escopo desta aula (os interessados podem consultar a referência [1]). Porém, podemos aplicar esse teorema facilmente.

Uma consequência importante dele é que, em conjunto com o Teorema de D'Alembert, podemos obter o chamado *Teorema da Decomposição* (enunciado mais abaixo). Lembre-se de que o Teorema de D'Alembert (que é um caso especial do Teorema do Resto) foi estudado na aula "Teorema do Resto" do Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do Ensino Médio. Ele nos diz que r é raiz de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - r)\,q(x)$. Em tal aula, também mencionamos o Teorema da Decomposição, sem enunciá-lo formalmente.

Antes de enunciar e provar o Teorema da Decomposição, vamos rever um resultado *equivalente* ao Teorema 3 da aula "Quantidade de raízes e consequências" do módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos" do 3º Ano do Ensino Médio. Lembre-se de que uma função $p(x)$ é chamada de identicamente nula quando satisfaz $p(x) = 0$ para todo x em seu domínio.

Teorema 1. *Seja $p(x)$ uma função polinomial complexa* não identicamente nula. *Se $p(x)$ possui pelo menos k raízes distintas, então $p(x)$ possui grau pelo menos k.*

Demonstração. Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_k$ raízes *distintas* de $p(x)$. Queremos demonstrar que o grau de $p(x)$ é pelo menos k.

Pelo Teorema de D'Alembert, como $p(r_1) = 0$, podemos escrever

$$p(x) = (x - r_1)\, q_1(x).$$

Como $p(r_2) = 0$ e $r_1 \neq r_2$, segue que $r_2 - r_1 \neq 0$ e, portanto, $q_1(r_2) = 0$. Novamente pelo Teorema de D'Alembert, temos que $q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$. Logo,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\, q_2(x).$$

Procedendo, analogamente, para r_3 temos que $p(r_3) = 0$, $r_3 - r_1 \neq 0$ e $r_3 - r_2 \neq 0$. Isto implica que $q_2(r_3) = 0$ e, novamente por D'Alembert,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\, q_3(x).$$

Continuando desta forma para $r_4, \ldots, r_k$, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_k)\, q_k(x). \tag{1}$$

Note que, como $p(x)$ não é identicamente nulo, então $q_k(x)$ também não é. Neste caso, podemos definir ℓ como o grau de $q_k(x)$. Além disso, se expandirmos o lado direito da equação, obtemos um polinômio de grau $k + \ell$. Logo, o grau de $p(x)$ é $k + \ell$. Como $\ell \geq 0$, concluímos que o grau deste polinômio é maior ou igual a k, como queríamos demonstrar. □

Teorema 2 (Teorema da Decomposição). *Todo polinômio não nulo, com coeficientes complexos e de grau n, pode ser expresso na forma fatorada como*

$$p(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n),$$

em que c é um número complexo e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes complexas de $p(x)$ (não necessariamente distintas). Além disso, essa fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

Demonstração. A primeira parte desta prova é semelhante à primeira parte da prova do Teorema 1, mas desta vez não temos a informação, a priori, de que o polinômio tem n raízes. Para garantir que essas raízes existem, usaremos o Teorema

Fundamental da Álgebra sucessivas vezes. Isso irá garantir a existência de uma fatoração. Ao final, usaremos o Teorema 1 para garantir que a fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

Seja $p(x)$ um polinômio complexo qualquer não identicamente nulo. Se $p(x)$ não é constante, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, ele possui uma raiz complexa, digamos r_1. Pelo Teorema de D'Alembert, existe um polinômio $q_1(x)$ tal que

$$p(x) = (x - r_1)q_1(x).$$

Agora, repita o argumento acima: se $q_1(x)$ não for constante, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe uma raiz complexa r_2 de $q_1(x)$ e podemos escrever:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x).$$

(Note que é possível que r_2 seja igual ou diferente de r_1). Veja que o grau de $q_i(x)$ diminui em exatamente uma unidade em cada passo à medida que i aumenta. Assim, se o grau de $p(x)$ é igual a n, podemos executar o processo acima exatamente n vezes até obter um polinômio constante, $q_n(x) = c$, o que resulta em:

$$p(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n).$$

Resta demonstrar que a decomposição acima é única, a menos da ordem dos fatores. Suponha que exista outra forma fatorada:

$$p(x) = c'(x - b_1)(x - b_2) \cdot \ldots \cdot (x - b_m).$$

(A priori, não sabemos se $m = n$, mas vamos demonstrar que isso tem que acontecer).

Temos que para todo x complexo vale:

$$c(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n) = c'(x-b_1)(x-b_2)\cdot\ldots\cdot(x-b_m).$$

Fazendo $x = r_1$ obtemos que o lado esquerdo da expressão acima é igual a zero. Logo,

$$c'(r_1 - b_1)(r_1 - b_2) \cdot \ldots \cdot (r_1 - b_m) = 0.$$

Para isso, é preciso que exista algum i tal que $r_1 = b_i$. Como a ordem dos fatores não nos interessa, podemos assumir, sem perda da generalidade que $r_1 = b_1$. Dessa forma, agora obtemos:

$$c(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n) = c'(x-r_1)(x-b_2)\cdot\dots\cdot(x-b_m).$$

Queremos cancelar o temos $(x - r_1)$ dos dois lados desta expressão, mas temos que ter um cuidado: isso só pode ser feito para $x - r_1 \neq 0$. Assim, a priori, podemos dizer apenas que para x *diferente de* r_1 vale:

$$c(x-r_2)\dots(x-r_n) = c'(x-b_2)\cdot\dots\cdot(x-b_m). \qquad (2)$$

Considere o polinômio,

$$f(x) = c(x-r_2)\dots(x-r_n) - c'(x-b_2)\cdot\dots\cdot(x-b_m)$$

e observe que ele possui grau no máximo $n-1$. Como a equação (2) vale para todo $x \neq r_1$, existem infinitos valores de x que a satisfazem. Em particular, é possível encontrar n números complexos distintos que a satisfazem. Isso garante que o polinômio $f(x)$ possui pelo menos n raízes distintas. Se tal polinômio fosse não nulo, pelo Teorema 1, ele teria grau pelo menos n. Mas já sabemos que ele possui grau no máximo $n-1$, logo isso não é possível. A única possibilidade é que $f(x)$ seja identicamente nulo o que quer dizer que podemos concluir que $f(x)$ é igual a zero para todo x complexo (inclusive para $x = r_1$). Equivalentemente, a equação (2) é satisfeita para todo x complexo.

Isso nos garante que a equação (2) é satisfeita para $x = r_2$. Fazendo tal substituição, o seu lado esquerdo torna-se zero. Portanto,

$$c'(r_2-b_2)\cdot\dots\cdot(r_2-b_m) = 0.$$

Logo, existe $j \in \{2,\dots,m\}$ tal que $r_2 - b_j = 0$, ou seja, $b_j = r_2$. De forma análoga ao que fizemos acima, podemos supor sem perda da generalidade que $b_2 = r_2$. Repetindo o raciocínio do parágrafo anterior, podemos concluir que

$r_3 = b_3$ e assim por diante. Note que isso implica também que, $m = n$ e $c = c'$, além de que:

$$r_1 = b_1, \quad r_2 = b_2, \quad \ldots, \quad r_n = b_n.$$

Logo, a fatoração é única (a menos da ordem dos fatores). $\square$

Observação 3. *Se $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio não nulo de grau n (ou seja, $a_n \neq 0$), ao escrever $p(x)$ em sua forma fatorada $p(x) = c(x - r_1)\ldots(x - r_n)$, vale que $c = a_n$. O número $c = a_n$ é chamado de coeficiente líder de $p(x)$, ou seja, c é o coeficiente do monômio de maior expoente.*

Exemplo 4. *Seja $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. Não é difícil perceber que o número 1 é raiz de $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$, o que pode ser feito pelo método da divisão euclidiana ou com o dispositivo de Briot-Rufini (veja as aulas correspondentes no Módulo "Funções Polinomiais com Coeficientes Complexos"), obtemos $p(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 3)$.*

Fazendo $q_1(x) = x^2 + 2x - 3$, veja que $q_1(x)$ possui como raízes os números 1 e 3. Assim, temos $q_1(x) = (x - 1)(x - 3)$. Com isso,

$$p(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 3).$$

Neste exemplo, veja que o número 1 é raiz tanto de $p(x)$ como de $q_1(x)$, de modo que $p(x)$ possui apenas duas raízes distintas. A expressão acima pode ser simplificada para:

$$p(x) = (x - 1)^2 (x - 3).$$

Dizemos que o número 1 é uma raiz múltipla *enquanto 3 é uma* raiz simples*. Mais especificamente o número 1 é raiz de multiplicidade igual a 2, ou ainda, uma raiz dupla de $p(x)$, já que a quantidade de vezes que $(x - 1)$ aparece na fatoração de $p(x)$ é 2.*

Exemplo 5. *Seja $q(x) = 8\,(x-3)^4\,(x-5)^3\,(x+i)$ um polinômio dado em sua forma fatorada. Este polinômio possui três raízes complexas distintas, a saber: 3, 5 e $-i$.*

- *A raiz 3 tem multiplicidade 4.*

- *A raiz* 5 *tem multiplicidade* 3.

- *A raiz* $-i$ *tem multiplicidade* 1.

A seguir, definimos formalmente o que vem a ser a multiplicidade de uma raiz.

Definição 6. *Seja r uma raiz de um polinômio $p(x)$. Dizemos que r tem multiplicidade m (onde m é um natural) quando $p(x) = (x - r)^m\, q(x)$ e $q(r) \neq 0$, ou seja, r* não *é raiz de $q(x)$. Veja que m é o maior natural tal que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - r)^m$ é igual a zero.*

Em geral, podemos tomar a forma fatorada

$$p(x) = c(x - r_1) \ldots (x - r_n)$$

e agrupar as raízes repetidas para escrever:

$$p(x) = c(x - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot c(x - z_k)^{\alpha_k},$$

em que $z_1, \ldots, z_k$ são as raízes distintas e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são suas respectivas multiplicidades. Ademais, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n$. (Mais detalhes sobre isso na próxima aula).

Exemplo 7. *Encontre uma função polinomial complexa cujas raízes são $-i$, i e 2, com multiplicidades 2, 2 e 1, respectivamente,*

Solução. Seja $p(x)$ uma função como no enunciado. Interpretando o enunciado, temos que na forma fatorada de $p(x)$ o expoente de $x + i$ é igual a 2, assim como o de $x - i$; por outro lado, o expoente de $x - 2$ é igual 1. Uma possibilidade é

$$p(x) = (x + i)^2\,(x - i)^2\,(x - 2).$$

Veja que esta não é a única possibilidade, pois podemos multiplicar $p(x)$ por qualquer constante, c, não nula e obter outro polinômio que possui as mesmas raízes com as mesmas multiplicidades.

Podemos, ainda, escrever $p(x)$ como uma soma de monômios, expandindo o produto:

$$\begin{aligned}(x+i)^2(x-i)^2(x-2) &= ((x+i)(x-i))^2(x-2)\\ &= (x^2+1)^2(x-2)\\ &= (x^4+2x^2+1)(x-2)\\ &= x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2.\end{aligned}$$

Logo, $p(x) = x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2$. $\square$

Exemplo 8. *Seja $p(x) = 4x^3-19x^2+28x+m$. Calcule:*

(a) m, sabendo que 2 é raiz dupla de $p(x)$;

(b) a outra raiz.

Solução. Como 2 é raiz de $p(x)$, basta substituir x por 2 e usar que $p(2) = 0$ para calcular o valor de m. Uma maneira alternativa de resolver o item (a) seria usar o dispositivo de Briot-Rufini para calcular o resto da divisão de $p(x)$ por $x-2$ e observar que tal resto tem que ser zero. Usando o dispositivo temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & -19 & 28 & m \\ \hline & 4 & -11 & 6 & \boxed{(12+1m)} \end{array}.$$

Pela tabela, o resto é igual a $12+m$, logo, $12+m=0$. Daí $m=-12$. Isso, em conjunto com o dispositivo acima nos diz que:

$$p(x) = (x-2)(4x^2-11x+6).$$

Por fim, como sabemos que 2 é raiz dupla de $p(x)$, temos que 2 também é raiz de $4x^2-11x+6$. Dividindo esse polinômio por $x-2$, temos:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & -11 & 6 \\ \hline & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}.$$

Logo, $4x^2 - 11x + 6 = (x-2)(4x+3)$, ou ainda,

$$p(x) = (x-2)^2(4x+3).$$

Por fim, a outra raiz de $p(x)$ é obtida fazendo $4x + 3 = 0$. Logo, $x = -3/4$. Veja que a forma fatorada (canônica) de $p(x)$ é:

$$p(x) = 4(x-2)^2\left(x + \frac{3}{4}\right).$$

□

Exemplo 9. *Obtenha a forma fatorada do polinômio* $p(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$.

Solução. Observe que

$$(x-1)p(x) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = x^n - 1.$$

Sendo assim, toda raiz de $p(x)$ é uma raiz do polinômio $f(x) = x^n - 1$, ou seja, satisfaz $x^n = 1$ e é uma raiz n-ésima da unidade (veja o último vídeo da aula "Radiciação de números complexos no plano de Argand-Gauss" do Módulo "Números Complexos – Forma Geométrica" do 3º Ano do EM). Mas veja que $p(x)$ possui (no máximo) $n-1$ raízes, enquanto $f(x)$ possui n raízes distintas. O número 1 é, claramente, a única raiz de $f(x)$ que não é raiz de $p(x)$.

Seja $w = \cos(2\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$, de modo que, para todo k natural, $w^k = \cos(2k\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi/n)$. Temos que as raízes de $p(x)$ são precisamente $w, w^2, \ldots, w^{n-1}$. Logo, sua forma fatorada é:

$$p(x) = (x-w)(x-w^2)\ldots(x-w^{n-1}).$$

□

2 Raízes múltiplas e a derivada

Dado um polinômio $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, definimos a *derivada* de f como o polinômio $f'(x)$ tal que:

1. Quando $f(x)$ tem grau zero, $f'(x)$ é identicamente nulo;
2. Quando $f(x)$ tem grau pelo menos 1,

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

A regra para a obtenção da derivada é bastante simples: a derivada de um polinômio constante é o polinômio identicamente nulo; a derivada de monômios de grau k, com $k \geq 1$, digamos cx^k, é igual a $k \cdot cx^{k-1}$. Ou seja, diminuímos o grau em uma unidade e multiplicamos o monômio pelo grau inicial:

$$cx^{k} \quad \mapsto \quad k \cdot cx^{k-1}.$$

Além disso, a derivada de um polinômio qualquer é obtida somando-se as derivadas de cada um de seus monômios.

Exemplo 10. *A derivada do monômio $3x^7$ é igual a $21x^6$. A derivada do polinômio $p(x) = 3x^7 + 2x^2 + 5x + 8$ é o polinômio $p'(x) = 21x^6 + 4x + 5$.*

Não é difícil perceber que se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios e $p(x) = f(x) + g(x)$, então

$$p'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

ou seja, a derivada de uma soma é igual a soma das derivadas. Esta é a chamada *regra da soma*.

Contudo a derivada do produto de dois polinômios é obtida de forma diferente.

Regra do produto: Se $p(x) = f(x)\,g(x)$, então

$$p'(x) = (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

A demonstração deste fato pode ser encontrada na seção "Raízes Múltiplas" da referência [1].

O teorema a seguir nos mostra a relação entre derivadas e multiplicidades de raízes de um polinômio.

Teorema 11. *Se r é raiz de multiplicidade m do polinômio $f(x)$, então r é raiz de multiplicidade $m-1$ do polinômio $f'(x)$.*

Demonstração. Se r é raiz de multiplicidade m de $f(x)$, podemos escrever

$$f(x) = (x - r)^m \, q(x),$$

em que $q(x)$ é um polinômio para o qual $q(r) \neq 0$.

Aplicando a regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-r)^{m-1}q(x) + (x-r)^m q'(x) \\ &= (x-r)^{m-1}(mq(x) + (x-r)q'(x)). \end{aligned}$$

Como $(x-r)$ não divide $mq(x)$ (pois r não é raiz de $q(x)$), a multiplicidade de r em $f'(x)$ é $m-1$. $\square$

Recomendamos que o leitor resolva os exercícios propostos na aba "Caderno de Exercícios".

Dicas para o Professor

O assunto deste material pode ser abordado em dois encontros de 50 minutos. O leitor que tem familiaridade com Cálculo Diferencial sabe que a derivada de uma função real pode ser obtida como um limite de taxas de variação dessa função (quando tal limite existir). Tal definição pode ser estendida para funções nos complexos, e é possível demonstrar que essa definição geral implica as regras da soma e do produto, bem como que a derivada de polinômios deve ser calculada conforme explicado aqui.

Contudo, para o caso de funções polinomiais, é possível fazer um tratamento formal de suas derivadas como uma operação puramente algébrica, como fizemos neste texto e em [1]. Além disso, pode-se utilizar a definição algébrica para demonstrar as regras da soma e do produto. Isso é uma maneira simples de introduzir o assunto sem a necessidade de falar sobre limites. Conforme vimos, mesmo sem o uso do Cálculo, é possível encontrar e demonstrar aplicações para a derivada.

A referência [1] contém uma discussão relativamente completa e profunda sobre equações polinomiais. A referência [2] é uma agradável leitura, a qual contempla a história das tentativas de se resolver equações polinomiais.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. I. Stewart. *Uma História da Simetria em Matemática*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.