Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Teorema de Tales - Parte II

Nono Ano do Ensino Fundamental

Prof. Marcelo Mendes de Oliveira
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 O Teorema da bissetriz interna

Nessa segunda parte da aula sobre o Teorema de Tales, aplicamo-lo ao estudo dos teoremas da bissetriz interna e externa relativas a um ângulo de um triângulo dado. Começamos analisando o *Teorema da Bissetriz Interna*, que trata da razão em que o pé da bissetriz interna de um dos ângulos de um triângulo divide o lado correspondente. Observe que divisão do lado oposto a um vértice de um triângulo ao meio é realizada pela *mediana*, e não pela bissetriz interna.

O resultado fundamental é o que segue.

Teorema 1 (da bissetriz interna). *Seja ABC um triângulo qualquer. Se a bissetriz interna do ângulo $\widehat{A}$ intersecta o lado BC no ponto D, então D divide o lado BC em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é,*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}.$$

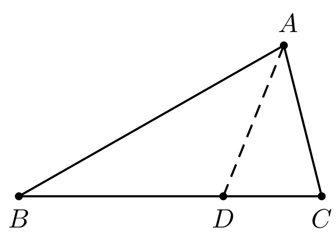
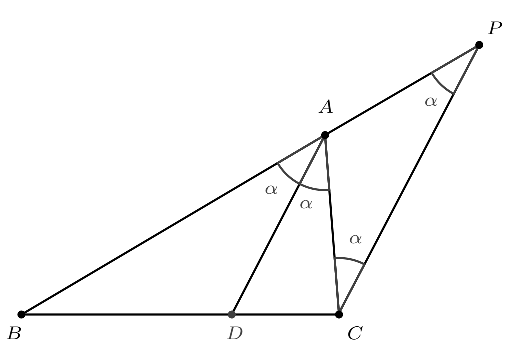


Figura 1: o teorema da bissetriz interna.

Observação 2. *Veja que o lado esquerdo da igualdade acima representa a razão em que o ponto D divide o lado BC.*

Prova. Sendo AD a bissetriz interna de $\widehat{A}$, tracemos uma paralela pelo vértice C à bissetriz AD, a qual encontrará o prolongamento de $\overrightarrow{BA}$ em um ponto P.



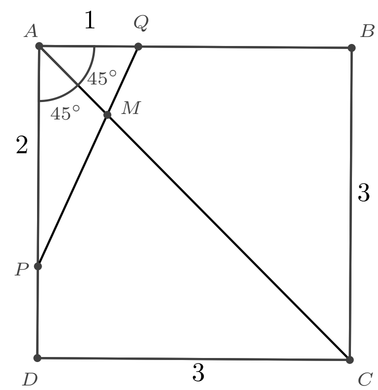
Pelo axioma das paralelas, o triângulo APC é isósceles (um de seus ângulos é alterno interno com uma das metades do ângulo $\widehat{A}$ e o outro é correspondente à outra metade). Portanto, segue do Teorema de Tales que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AP}$, ou, ainda (uma vez que $AP = AC$),

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

□

Exemplo 3. *Sejam P e Q pontos sobre os lados DA e AB, respectivamente, de um quadrado de lado 3, tais que $AP = 2$ e $AQ = 1$. Se a diagonal AC do quadrado intersecta o lado PQ no ponto M, calcule a razão em que M divide o segmento PQ.*

Solução. Observe a figura abaixo, representativa da situação em questão.



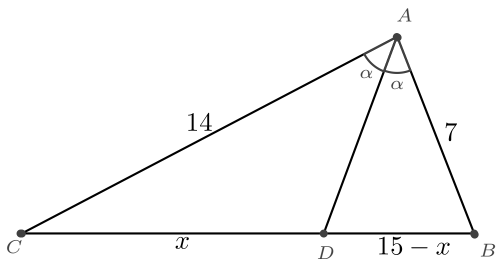
É bem sabido que a diagonal AC divide o ângulo $B\widehat{A}D$ ao meio. Assim, AM é bissetriz interna do triângulo APQ. Daí, pelo teorema da bissetriz interna, tem-se

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{2}{1} = 2.$$

□

Exemplo 4. *Os lados de um triângulo medem 7cm, 14cm e 15cm. Calcule a medida do maior segmento que a bissetriz interna do ângulo oposto ao maior lado determina sobre o mesmo.*

Solução. Se ABC é um triângulo tal que $AB = 7$, $BC = 15$ e $CA = 14$ (veja a figura a seguir), queremos calcular o comprimento do maior segmento determinado, sobre o lado BC, pela bissetriz interna partindo de A.



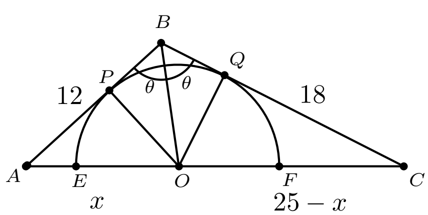
Tal segmento será o adjacente a AC (pois a proporcionalidade do teorema da bissetriz interna garante que o maior segmento determinado fica ao lado do maior lado). Sendo x a medida desse segmento, o outro segmento sobre BC medirá $15 - x$. Agora, pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{15-x}{7} = \frac{x}{14} \Leftrightarrow 210 - 14x = 7x$$
$$\Leftrightarrow 21x = 210 \Leftrightarrow x = 10.$$

□

Exemplo 5. *No triângulo ABC, em que $AB = 12$, $BC = 18$ e $AC = 25$, um semicírculo é desenhado com diâmetro sobre o lado AC, de tal forma que ele seja tangente aos lados AB e BC. Se O é o centro do semicírculo, encontre a medida de AO.*

Solução. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.



Sejam P e Q os pontos de tangência desse semicírculo com os lados AB e BC, respectivamente. Pelo teorema do 'bico', temos $BP = BQ$. Além disso, BO é lado comum aos triângulos BPO e BQO, que ainda têm lados PO e QO com comprimentos iguais, pois são raios do semicírculo. Isso garante a congruência entre os triângulos BPO e BQO, pelo caso de congruência LLL. Portanto, $P\widehat{B}O = Q\widehat{B}O$, ou seja, BO é bissetriz interna de $A\widehat{B}C$.

Agora, sendo x a medida de AO, temos que $25 - x$ é a medida de OC. Portanto, pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{x}{12} = \frac{25-x}{18} \Leftrightarrow 18x = 300 - 12x$$
$$\Leftrightarrow 30x = 300 \Leftrightarrow x = 10.$$

□

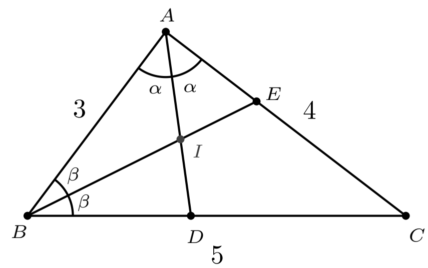
Para o próximo exemplo, recorde que o **incentro** de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do mesmo, e que tal ponto equidista dos lados do triângulo; em particular, ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Exemplo 6. *Seja ABC um triângulo com lados $AB = 3$, $AC = 4$ e $BC = 5$. Seja também D o ponto sobre o lado BC tal que AD é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{A}$. Se I é o incentro de ABC, calcule:*

(a) a medida do segmento BD;

(b) a razão em que o ponto I divide a bissetriz interna AI.

Solução. A figura a seguir servirá à análise de ambos os itens pedidos.



(a) Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABC, temos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Aplicando as propriedades de proporções à igualdade acima, podemos repetir os numeradores e, em seguida, somá-los aos denominadores. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow BD = \frac{15}{7}.$$

(b) Agora, a ideia é perceber que o segmento BI também é bissetriz interna do triângulo ABD. Assim, pelo teorema da bissetriz interna, obtemos

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{3}{\frac{15}{7}} \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{7}{5}.$$

□

Exemplo 7. *A bissetriz interna AD de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos BD e CD, de medidas respectivamente iguais a 24cm e 30cm. Sabendo que AB e AC têm comprimentos respectivamente iguais a $2x + 6$ e $3x$, calcule o valor de x e as medidas de AB e AC.*

Solução. Uma vez mais pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{2x+6}{3x} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 12x = 10x + 30 \Leftrightarrow x = 15.$$

Portanto,

$$AB = 2x + 6 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$$

e, analogamente, $AC = 45$. $\square$

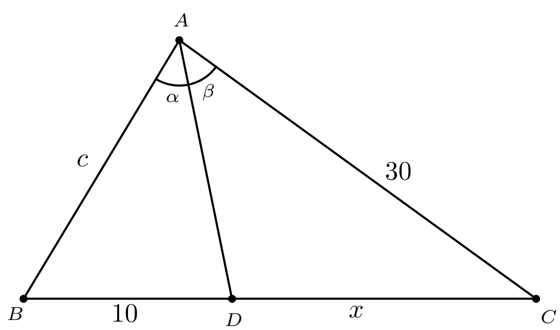
Exemplo 8. *Calcule a medida do lado AB do triângulo ABC sabendo que:*

(i) a bissetriz interna AD de $\widehat{A}$ determina o segmento BD de medida $10cm$;

(ii) o lado AC mede $30cm$;

(iii) o perímetro de ABC é $75cm$.

Solução. Representamos a situação descrita na figura abaixo:



Aplicando o teorema da bissetriz interna, obtemos

$$\frac{c}{10} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow cx = 30.$$

Por outro lado, a medida do perímetro de ABC fornece a igualdade $c + 10 + x + 30 = 75$, de sorte que

$$c + x = 35.$$

Resolvendo o sistema de equações

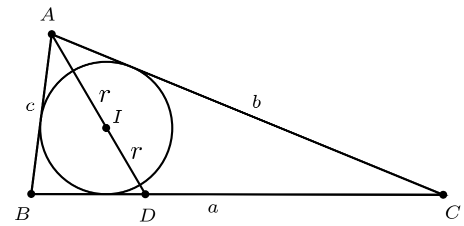
$$\begin{cases} c + x = 35 \\ cx = 30 \end{cases},$$

concluímos que c e x medem, alguma ordem, 15 e 20. Logo, AB mede $15cm$ ou $20cm$ (observe que ambas essas medidas verificam a desigualdade triangular, de modo que realmente há duas soluções possíveis). $\square$

Terminemos esta seção apresentando um exemplo um tanto mais elaborado.

Exemplo 9. *Prove que não existe triângulo no qual o círculo inscrito divide a bissetriz interna de um ângulo em três segmentos de mesmo comprimento.*

Prova. Considere a figura a seguir como representativa da situação do problema. Por contradição, suponha que a bissetriz interna AD fique dividida, pelo círculo inscrito, em três segmentos de comprimentos iguais. Então, sendo I o incentro de ABC e r o raio do círculo inscrito, é imediato que $AI = ID = 3r$.



Agora, aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABD (com a bissetriz AD), vimos no Exemplo 6 que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}.$$

Se juntarmos esse resultado com o teorema da bissetriz interna aplicado ao triângulo ABC (com bissetriz AD) e utilizarmos propriedades de proporções, obtemos

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{b + c}{a}.$$

Mas, como $AI = ID = 3r$, seguiria daí que

$$\frac{b + c}{a} = \frac{AI}{ID} = \frac{3r}{3r} = 1,$$

o que contradiz a desigualdade triangular. Segue o resultado. $\square$

2 O teorema da bissetriz externa

Finalmente, vamos ao *Teorema da Bissetriz Externa*, que trata da razão em que o pé da bissetriz externa de um dos ângulos de um triângulo divide o prolongamento do lado correspondente.

Para o que segue, suponha dado um triângulo ABC tal que $AB \neq AC$. Assumindo, sem perda de generalidade, que $AB > AC$, não é difícil concluir que a bissetriz do ângulo externo de ABC no vértice A (conhecida como a **bissetriz externa** de ABC relativa a A) intersecta a reta $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto E tal que $C \in DE$ (cf. Figura 2). Nesse caso, dizemos que E é o **pé da bissetriz externa** relativa ao vértice A (ou ao lado BC). Doravante, assumiremos a validade de tais observações sem maiores comentários.

O resultado fundamental é o que segue.

Teorema 10 (da bissetriz externa). *Seja ABC um triângulo tal que $AB > AC$. Se E é o pé da bissetriz externa relativa ao vértice A, então E divide o lado BC (*externamente*) em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados. Em símbolos,*

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}.$$

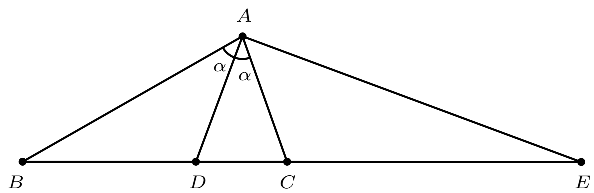


Figura 2: o teorema da bissetriz externa.

Prova. Pelo ponto C, tracemos a reta CF paralela à reta AB, com F sobre o segmento AE (cf. Figura 3).

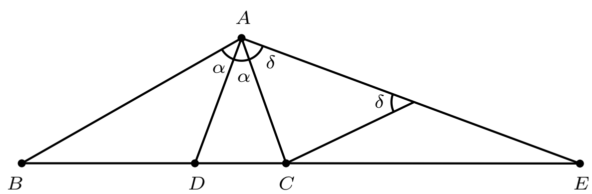


Figura 3: prova do teorema da bissetriz externa.

Sejam $\widehat{A} = 2\alpha$ e $C\widehat{A}E = \delta$. Como AE é bissetriz externa relativa ao vértice A, temos $\delta = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$. Por outro lado, como $\angle BAF$ e $\angle CFA$ são ângulos alternos internos, temos

$$\begin{aligned} C\widehat{F}A &= 180° - B\widehat{A}F = 180° - (2\alpha + \delta) \\ &= 2(90° - \alpha) - \delta = 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

Assim, ACF é um triângulo isósceles, com $AC = CF$.

Aplicando o Teorema de Tales às paralelas AB e CF, com transversais AE e BE, obtemos

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{CF}.$$

Mas, como $AC = DF$, isso é o mesmo que $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$. □

Observações 11.

1. *Atente como é fácil lembrar o teorema da bissetriz externa a partir do teorema da bissetriz interna: basta substituir o ponto D pelo ponto E nas equações que são os resultados.*

2. *As bissetrizes interna e externa são sempre perpendiculares entre si. Verifique essa afirmação!*

Exemplo 12. *Sejam ABC um triângulo retângulo em A e AD e AE as bissetrizes interna e externa, respectivamente, relativas ao vértice A. Se $AB = 3$ e $AC = 4$, então DE mede:*

(a) 17.

(b) 18.

(c) $\frac{120}{7}$.

(d) $\frac{125}{7}$.

Solução. Pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{3+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow BD = \frac{15}{7}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\begin{aligned} \frac{BE}{EC} = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{BE}{EC - BE} = \frac{3}{4-3} \\ &\Leftrightarrow \frac{BE}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow BE = 15. \end{aligned}$$

Portanto,

$$ED = EB + BD = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7}.$$

□

Exemplo 13. *Sejam D e E respectivamente os pés das bissetrizes interna e externa do ângulo $\widehat{A}$ do triângulo ABC. Sabendo que $AB = 4$, $AC = 2$ e $BC = 3$, calcule o comprimento do raio do círculo circunscrito ao triângulo DAE.*

Solução. Pelo teorema da bissetriz interna (esboce uma figura para acompanhar os argumentos), temos

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{2} = 2.$$

Como $BC = 3$, temos $BD = 2$ e $DC = 1$.

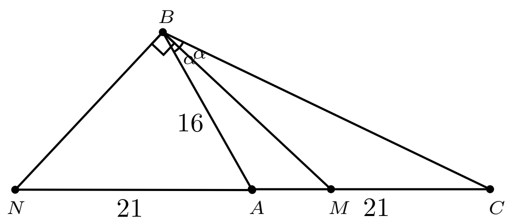
Pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\begin{aligned} \frac{BE}{EC} = \frac{4}{2} = 2 &\Leftrightarrow \frac{BE - EC}{EC} = \frac{4-2}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{EC} = 1 \Leftrightarrow CE = 3. \end{aligned}$$

Como AD e AE são perpendiculares, concluímos que o segmento DE, que mede 4, é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo DAE. Assim, o comprimento do raio de tal círculo mede 2. □

Exemplo 14. *Em um triângulo ABC, as bissetrizes interna e externa traçadas a partir do vértice B encontram o lado oposto (ou seu prolongamento) nos pontos M e N, respectivamente. Se $AC = 21$, $AB = 16$ e $AN = 21$, calcule os comprimentos dos segmentos BC e AM.*

Solução. Primeiramente, observe que as igualdades $AN = 21$ e $AC = 21$ garantem que A é o ponto médio do segmento CN (veja a figura abaixo).



Agora, pelo teorema da bissetriz externa, temos

$$\frac{NA}{NC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{21}{42} = \frac{16}{BC} \Leftrightarrow BC = 32.$$

Por outro lado, pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\begin{aligned}\frac{AM}{MC} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{AM}{AM + MC} = \frac{1}{1+2}\\ &\Leftrightarrow \frac{AM}{21} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AM = 7.\end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em dois encontros de 50 minutos cada. Ao longo dos exemplos, você deve sempre enfatizar o uso de uma das versões do teorema da bissetriz como ferramenta principal, assim como pode utilizar exemplos mais elaborados (veja as referências). Os teoremas das bissetrizes interna e externa têm aplicações interessantes à Geometria, sendo um exemplo notável aquele dado pelo *círculo de Apolônio*. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume* 2*: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume* 9*: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2013.