Material Teórico - Módulo Trigonometria I

Círculo trigonométrico - Parte 2

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

14 de maio de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Redução ao primeiro quadrante

Na primeira parte desta aula apresentamos o "Círculo Trigonométrico", como o círculo de raio 1 com centro na origem, o ponto $O = (0, 0)$, do plano cartesiano. Nomeamos o ponto $(1, 0)$ como a origem do círculo e o denotamos por A. E dado um comprimento α de um arco, marcamos o ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que $\widehat{AP}$ mede α. Assim fazendo, definimos os números $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ de tal sorte que

$$P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha). \tag{1}$$

Observação 1. *Escrevemos simplesmente* $\operatorname{sen}\alpha$ *no lugar de* $\operatorname{sen}(\alpha)$, *apenas pelo fato de a primeira notação ser mais compacta. Ambas essas notações têm o mesmo significado, mas a primeira deve ser usada com cautela, especialmente em expressões longas, para não haver risco de ambiguidades.*

Nesta seção, vamos relacionar os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ obtidos pela definição acima, com as medidas de catetos de certos triângulos retângulos.

Sem perda da generalidade, assuma que $0 < \alpha < 2\pi$. (Não sendo esse o caso, podemos substituir α por sua menor determinação positiva, conforme estudado na Parte 1).

Quando $0 < \alpha < \pi/2$ (ou seja, α corresponde a um ângulo de medida menor que $90°$), naturalmente podemos construir um triângulo retângulo em que um dos ângulos mede o próprio α, e usar as razões trigonométricas nesse triângulo para calcular $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. Contudo, quando α *não* satisfaz $0 < \alpha < \pi/2$, tal triângulo retângulo não existe. Nesse caso, podemos usar a técnica de *redução ao primeiro quadrante* para calcular o seno e o cosseno de α (assim como sua tangente). Detalharemos como isso pode ser feito, de acordo com o quadrante ao qual pertence o ponto P (aquele para o qual AP mede α).

Quando P está no primeiro quadrante, temos $0 < \alpha < \pi/2$, e podemos construir um triângulo retângulo de hipotenusa AP e um dos ângulos internos de medida α radianos, conforme a Figura 1. Veja que, nesse caso, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ são positivos e, como $\overline{AP} = 1$, as razões trigonométricas ("cateto oposto sobre hipotenusa", etc) mostram que $\operatorname{sen}\alpha$ é a medida do cateto oposto a α e $\cos\alpha$ é a medida do outro cateto no triângulo destacado.

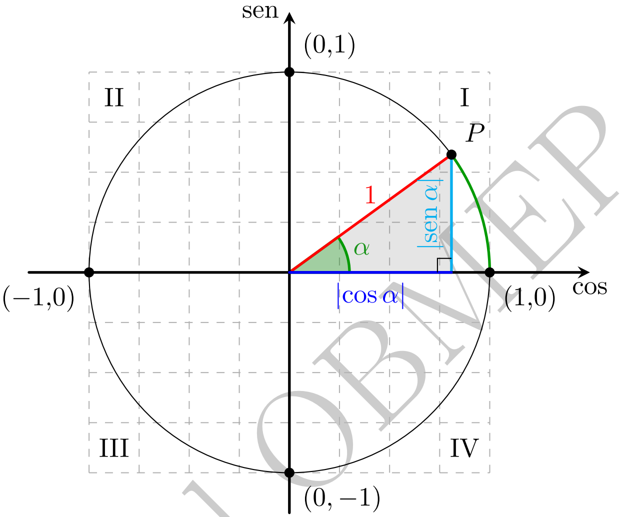


Figura 1: seno e cosseno no primeiro quadrante.

Nas seções seguintes, estudaremos o acontece quando P está no segundo, terceiro e quarto quadrante. Em cada caso, definiremos um ponto Q e tomaremos $\beta = \widehat{AQ}$. Com uma escolha adequada de Q, teremos

$$|\operatorname{sen}\alpha| = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad |\cos\alpha| = \cos\beta.$$

Feito isso, observe que também podemos encontrar os sinais de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ de acordo com o quadrante de P.

1.1 Do segundo ao primeiro quadrante

A Figura 2 mostra um exemplo com P no segundo quadrante, isto é, com $\pi/2 < \alpha < \pi$. Nesse caso, temos $\cos\alpha < 0$ e

$\operatorname{sen}\alpha > 0$. Denotando por B o pé da perpendicular baixada de P ao eixo-x. No triângulo OPB os catetos medem:

$$\overline{PB} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\alpha.$$

Vamos escolher o ponto Q como sendo o simétrico de P em relação ao eixo-y (veja a Figura 2); como $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, temos $Q = (-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Por outro lado, sendo $\beta = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Comparando as duas expressões para as coordenadas do ponto Q, obtemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos\beta.$$

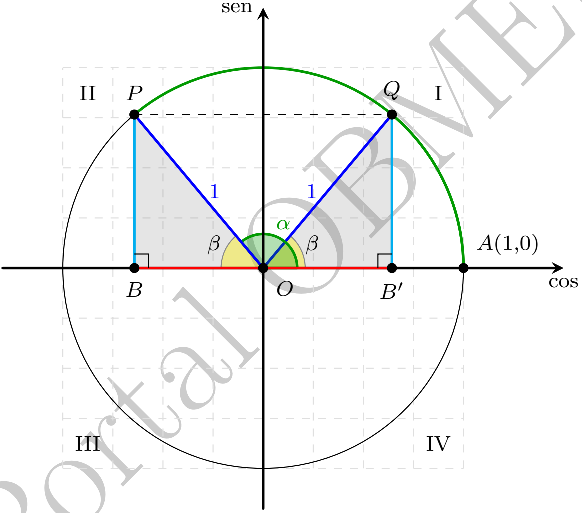


Figura 2: seno e cosseno no segundo quadrante.

Agora, seja B' o pé da perpendicular baixada de Q ao eixo-x (observe novamente a Figura 2). A simetria entre P e Q em relação ao eixo-y assegura a simetria de B e B' em relação ao mesmo eixo, de modo que os triângulos OPB e OQB' são congruentes, pelo caso "lado, lado, lado". Logo, $P\hat{O}B = Q\hat{O}B'$. Por outro lado, $P\hat{O}B = \pi - \alpha$. Portanto,

$$\beta = \widehat{AQ} = Q\hat{O}B' = P\hat{O}B = \pi - \alpha.$$

Substituindo essa expressão para β nas expressões que relacionam $\operatorname{sen}\beta$ com $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta$ com $\cos\alpha$, concluímos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha). \tag{2}$$

Observação 2. *É possível mostrar que as equações em (2) são válidas para qualquer valor de α (contudo, apenas no caso em α está no segundo quadrante é que temos $\pi - \alpha$ situado no primeiro quadrante).*

A partir das fórmulas (2) e levando em consideração a observação acima, temos também

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)} = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha),$$

para todo valor de α tal que $\cos\alpha \neq 0$.

1.2 Do terceiro ao primeiro quadrante

A Figura 3 mostra um exemplo com P no terceiro quadrante, isto é, com $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Assim sendo, temos $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$. Logo, para o ponto B como antes (isto é, para B sendo o pé da perpendicular baixada de P ao eixo-x), temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \overline{OB} = -\cos\alpha.$$

Dessa vez, vamos escolher Q como sendo o simétrico de P em relação à origem O do plano cartesiano (veja a Figura 2). Em particular, Q pertence ao primeiro quadrante e os pontos P, O e Q são colineares. Assim, como $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, temos que $Q = (-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$. Agora, sendo $\beta = \widehat{AQ}$, também podemos escrever $Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Comparando novamente as duas expressões acima para as coordenadas de Q, obtemos

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos\beta.$$

Também como antes, seja B' o pé da perpendicular de Q traçada ao eixo-x. Veja que $P\hat{O}B = Q\hat{O}B'$, pois estes são ângulos opostos pelos vértice. Por outro lado, $P\widehat{O}B = \alpha - \pi$, de sorte que

$$\beta = \widehat{AQ} = P\widehat{O}B = \alpha - \pi.$$

Substituindo essa expressão para β nas relações entre $\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\beta$, $\cos\alpha$, chegamos a

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha - \pi) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi). \tag{3}$$

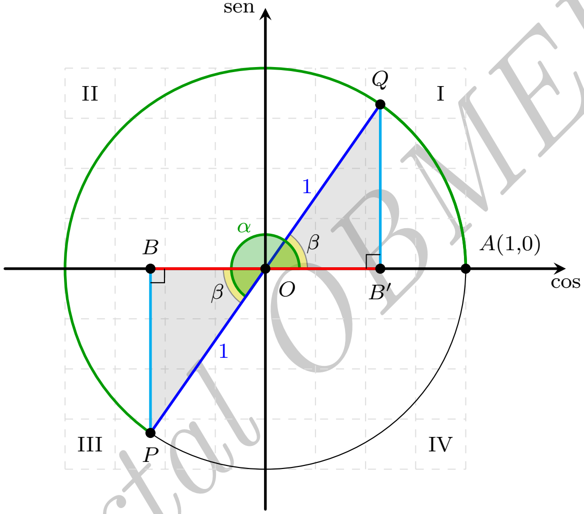


Figura 3: seno e cosseno no terceiro quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha - \pi)}{-\cos(\alpha - \pi)} = \operatorname{tg}(\alpha - \pi).$$

Uma vez que $\alpha = \pi + \beta$, isso também equivale a

$$\operatorname{tg}(\pi + \beta) = \operatorname{tg}(\beta).$$

Observação 3. *O argumento desse caso é essencialmente o mesmo do caso anterior. Porém, o fato de P estar no* *terceiro quadrante faz com que os sinais de* $\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos\alpha$ *sejam diferentes, comparativamente ao caso anterior, assim como a relação entre* α *e* β *é diferente daquela do caso anterior.*

Também é possível mostrar que as equações em (3)*, assim como a relação entre* $\operatorname{tg}\beta$ *e* $\operatorname{tg}\alpha$*, são válidas para qualquer valor de* α *(a última delas contanto que* $\cos\alpha \neq 0$*). Mas, apenas no caso em* α *está no terceiro quadrante, temos que* $\alpha - \pi$ *está no primeiro quadrante.*

1.3 Do quarto ao primeiro quadrante

Como último caso, a Figura 4 mostra um exemplo com P no quarto quadrante, isto é, com $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Veja que, desta feita, temos $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$. Logo, definindo o ponto B como antes, temos

$$\overline{PB} = -\operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \overline{OB} = \cos\alpha.$$

Escolhendo o ponto Q como o simétrico de P em relação ao eixo-x (veja a Figura 4), temos Q situado no primeiro quadrante. Ainda pela simetria, juntamente com o fato de que $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, obtemos $Q = (\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$. Por outro lado, sendo $\beta = \widehat{AQ}$, também temos $Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Assim, comparando as duas expressões para as coordenadas de Q, vem

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos\beta.$$

Nesse caso, o pé B' da perpendicular baixada de Q ao eixo-x coincide com o ponto B. Então, os triângulos OPB e OQB são congruentes pelo caso "lado, lado, lado", de sorte que $P\widehat{O}B = Q\widehat{O}B$.

Por outro lado, $P\widehat{O}B = 2\pi - \alpha$. Portanto,

$$\beta = \widehat{AQ} = Q\widehat{O}B = P\widehat{O}B = 2\pi - \alpha.$$

Concluímos, pois, que

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha). \tag{4}$$

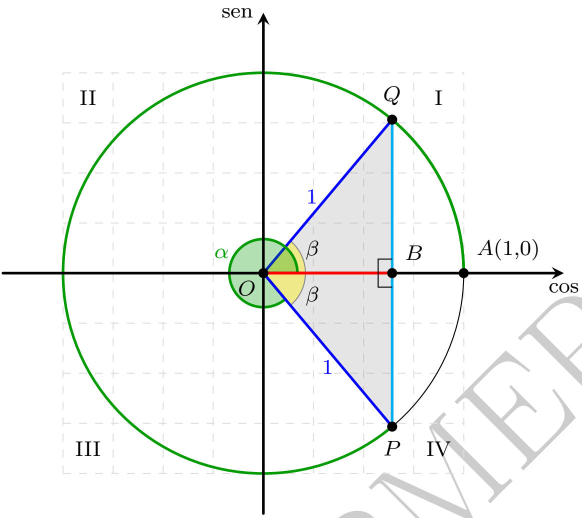


Figura 4: seno e cosseno no quarto quadrante.

Temos também que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = -\operatorname{tg}(2\pi-\alpha).$$

Observação 4. *Como nos outros casos, as equações em* (4) *também valem para qualquer arco* α *(no caso da tagente, contanto que* $\cos\alpha \neq 0$*. Contudo, o caso em que* α *está no terceiro quadrante é interessante pois* $2\pi - \alpha$ *está no primeiro quadrante.*

Antes de examinarmos alguns exercícios, cumpre traduzirmos as fórmulas obtidas nas subseções anteriores, de radianos para graus. Fazemos isto no exemplo a seguir.

Exemplo 5. *Traduza de radianos para graus as relações* (2), (3) *e* (4) *obtidas nas subseções acima.*

Solução. Lembre-se de que π radianos equivalem a $180°$.

Assim, para α no segundo quadrante temos, em graus, $90° < \alpha < 180°$. Ao reduzir ao primeiro quadrante, escolhemos $\beta = 180° - \alpha$, de modo que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(180° - \alpha).$$

Quando α está no terceiro quadrante, temos em graus que $180° < \alpha < 270°$. Neste caso, $\beta = \alpha - 180°$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180°) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°).$$

Por fim, quando α está no quarto quadrante, temos em graus que $270° < \alpha < 360°$. Também, o arco $\beta = 360° - \alpha$ está no primeiro quadrante e satisfaz

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360° - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos(360° - \alpha).$$

$\square$

2 Exercícios

Abaixo, relembramos os valores do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis, os quais serão úteis aos exercícios.

Ângulo (graus)	**Ângulo (radianos)**	**sen**	**cos**	**tg**
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Para os exercícios seguintes sugerimos que, antes de ler suas soluções, o leitor desenhe os ângulos envolvidos sobre o Círculo Trigonométrico e use as devidas simetrias, no lugar de simplesmente utilizar as fórmulas apresentadas na seção anterior.

Exemplo 6. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 120^\circ$ *e* $\cos 120^\circ$.

Solução. Veja que 120° pertence ao segundo quadrante, pois $90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$. Assim, de acordo com a Figura 2, ao reduzir 120° para o primeiro quadrante, obtemos um ângulo de 60°. De acordo com a tabela anterior, $\operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\cos 60^\circ = 1/2$. Mas, como $\operatorname{sen} 120^\circ > 0$ e $\cos 120^\circ < 0$, temos que:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 7. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen}(5\pi/6)$ *e* $\cos(5\pi/6)$.

Solução. Veja que $5\pi/6$ pertence ao segundo quadrante, pois está entre $\pi/2$ e π. Como no exemplo anterior, observando a Figura 2, reduzimos esse arco ao arco do primeiro quadrante $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$. Por outro lado, sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2$ e $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$. Então, como $\operatorname{sen}(5\pi/6) > 0$ e $\cos(5\pi/6) < 0$, temos:

$$\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 8. *Qual o valor de* $\operatorname{tg}(5\pi/4)$*?*

Solução. Veja que $\pi < 5\pi/4 < 3\pi/2$, logo, $5\pi/4$ pertence ao terceiro quadrante; então, $\operatorname{tg}(5\pi/4) > 0$. De acordo com Figura 3, ao reduzir $5\pi/4$ ao primeiro quadrante, obtemos $\beta = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$. Logo,

$$\operatorname{tg}(5\pi/4) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1. \qquad \square$$

Exemplo 9. *Encontre o ângulo β tal que $0° \leq \beta < 360°$,*

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}216° \quad e \quad \cos\beta = \cos 216°.$$

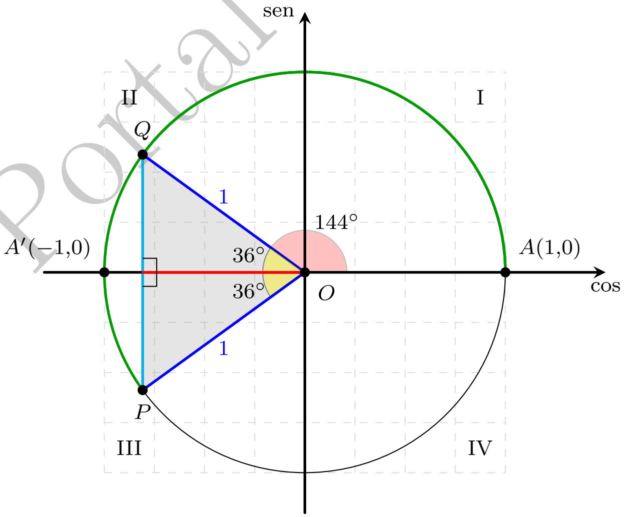
Solução. Essa pergunta é diferente das anteriores, mas podemos atacá-la de maneira similar. Primeiro, vamos identificar o quadrante de $216°$. Como $180° < 216° < 270°$, temos $\operatorname{sen}216° < 0$ e $\cos 216° < 0$. Então, as igualdades do enunciado garantem que $\operatorname{sen}\beta > 0$ e $\cos\beta < 0$. Isso, juntamente com $0° \leq \beta < 360°$, indica que β pertence ao segundo quadrante.

Sejam $A = (1{,}0)$, $A' = (-1, 0)$ e P o ponto do Círculo Trigonométrico tal que $A\hat{O}P = 216°$ (com o arco $\overset{\frown}{AP}$ medido no sentido anti-horário, de A para P). Agora, observe que a redução de $216°$ ao primeiro quadrante é $216° - 180° = 36°$.

A fim de obter o ponto do segundo quadrante correspondente a β, tomemos Q como o simétrico de P em relação ao eixo x (veja a figura a seguir). Temos que $Q\hat{O}A' = A'\hat{O}P = 36°$. Daí, $A\hat{O}Q = 180° - 36° = 144°$.

Por fim, veja que $\beta = 144°$ satisfaz as condições do enunciado, pois

$$\operatorname{sen}144° = -\operatorname{sen}216° \quad \text{e} \quad \cos 144° = \cos 216°.$$



$\square$

Exemplo 10. *Se* $R = \operatorname{sen} 130° + \cos 130°$. *Decida, com justificativa, se* R *é positivo, negativo ou igual a zero.*

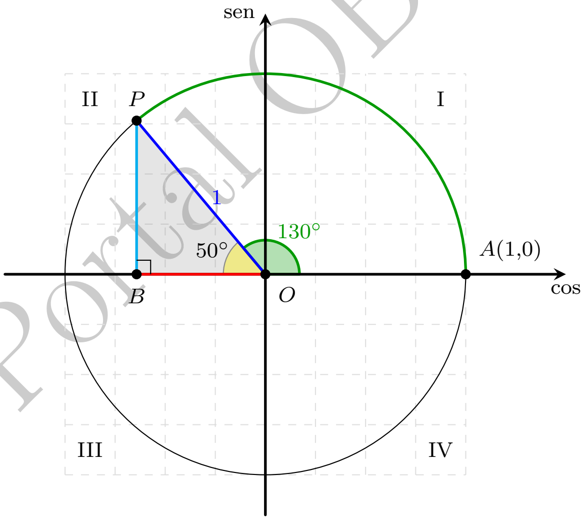
Solução. A figura seguinte nos mostra um ângulo de 130°, juntamente com o arco correspondente sobre o Círculo Trigonométrico. Veja que $\operatorname{sen} 130° > 0$ enquanto $\cos 130° < 0$. Se B é o pé da perpendicular de P traçada ao eixo x, temos

$$\overline{PB} = \operatorname{sen} 130° \quad \text{e} \quad \overline{BO} = -\cos 130°.$$

Logo,

$$R = \overline{PB} - \overline{BO}.$$

No triângulo PBO, temos que $P\widehat{O}B = 180° - 130° = 50°$, de sorte que $B\widehat{P}O = 40°$. Como o menor lado de um triângulo é o oposto ao seu menor ângulo, concluímos que $\overline{BO} < \overline{PB}$. Logo, $R > 0$.



$\square$

Exemplo 11. *Calcule os valores de* $\operatorname{sen} 1410°$, $\cos 1410°$ *e* $\operatorname{tg} 1410°$.

Solução. Nesse caso, vamos primeiro calcular a menor determinação positiva de 1410°. Para isso, começamos dividindo 1410 por 360, obtendo

$$1410 = 3 \cdot 360 + 330.$$

Logo, 1410° e 330° são congruentes, de modo que

$$\operatorname{sen} 1410^\circ = \operatorname{sen} 330^\circ \quad \text{e} \quad \cos 1410^\circ = \cos 330^\circ.$$

Agora, basta reduzir 330° ao primeiro quadrante. Observando que $270^\circ < 330^\circ < 360^\circ$, vemos que o arco correspondente a 330° pertence ao quarto quadrante. Então, revisitando a Figura 4, vemos que devemos tomar $\beta = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. Dessa forma, segue que

$$\operatorname{sen} 1410^\circ = \operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 1410^\circ = \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} 1410^\circ = \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.\square$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo desta aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.