Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS

Problemas do Capítulo 4

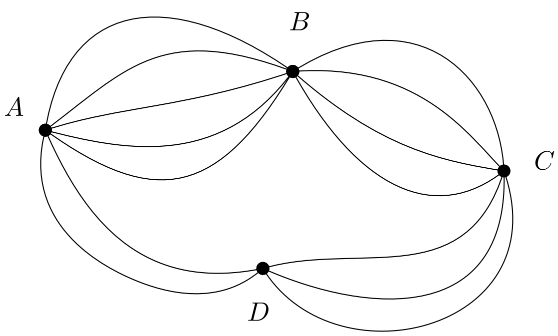
Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Outubro de 2021

1 Problemas do Capítulo 4

Exercício 1. *Um determinado país tem quatro cidades: A, B, C e D. Existem 5 estradas entre A e B, 4 entre B e C, 2 entre A e D e 3 entre D e C (veja o diagrama). De quantas formas diferentes é possível viajar de A para C:*



(a) Passando por B?

(b) Passando por B ou por D?

Solução.

(a) É possível ir de A para B de 5 maneiras diferentes, dependendo da estrada escolhida. Para cada uma delas, existem 4 caminhos de B para C. Temos, então, o total de $5 \times 4 = 20$ maneiras de ir de A para C passando por B sem visitar outra cidade.

(b) Existem $2 \times 3 = 6$ maneiras diferentes de ir de A para C passando por D. Logo, para ir de A para C passando por B ou por D, existem $20 + 6 = 26$ caminhos diferentes.

□

Exercício 2. *Se você tiver uma ampulheta de 7 minutos e outra de 11 minutos é possível usá-las para ferver um ovo durante 15 minutos?*

Solução. Comece as duas ampulhetas, a de 7 e a de 11 simultaneamente. Quando a de 7 minutos terminar, coloque o ovo minutos, na água fervente. Quando a de 11 minutos terminar, vire-a; o ovo já estará na água há 4 minutos. Quando a ampulheta de 11 minutos terminar, terão passados exatamente $4 + 11 = 15$ minutos. □

Exercício 3. *Há 3 lâmpadas em um fio muito curto de luzes para árvores de natal: A primeira é vermelha, a segunda é azul e a terceira é verde. Casa uma pode estar acessa ou apagada. De quantas maneiras este fio pode estar iluminado com pelo menos uma luz acessa? E se forem cinco lâmpadas de cinco cores diferentes?*

Solução. Quando só uma das lâmpadas estiver acesa, existem três possibilidades. Quando exatamente duas estiverem acessas, exatamente uma estará desligada e há três maneiras disso acontecer. Finalmente, todas as três lâmpadas podem estar acessas. Logo, há sete maneiras diferentes do fio estar iluminado.

Podemos tentar contar todas as possibilidades, como fizemos antes. Quando só uma das lâmpadas estiver acesa, existem cinco possibilidades. Quando exatamente quatro estiverem acessas, exatamente uma estará desligada e há cinco maneiras disso acontecer.

Como podemos contar todas as possibilidades quando exatamente duas lâmpadas estiverem acesas? Um modo é o seguinte. Estique o fio, alinhando as lâmpadas. Se as duas lâmpadas acessas forem adjacentes, existem quatro possibilidades:

$$* * - - -$$
$$- * * - -$$
$$- - * * -$$
$$- - - * *$$

Se elas estiverem separadas por uma lâmpada apagada, existem três possibilidades:

$$* - * - -$$
$$- * - * -$$
$$- - * - *$$

Se elas estiverem separadas por duas lâmpadas apagadas, existem duas possibilidades

$$* - - * -$$
$$- * - - *$$

. Se elas estiverem separadas por três lâmpadas apagadas, a única possibilidade é

$$* - - - *$$

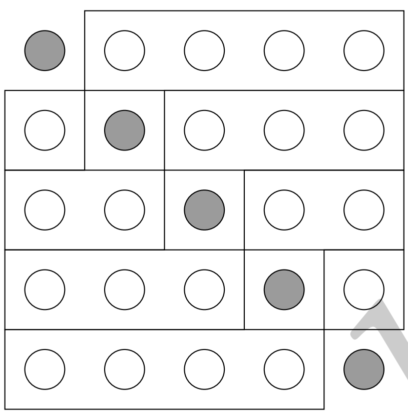
Logo, há $4+3+2+1 = 10$ quando há duas lâmpadas acessas. Há o mesmo número de opções quando três lâmpadas estiverem acessas, pois, neste caso, duas estarão desligadas. Existe mais uma opção, quando todas as lâmpadas estiverem ligadas. Logo, o número de possibilidades é $5 + 5 + 10 + 10 + 1 = 31$. □

Exercício 4. *Prove que para qualquer inteiro positivo n temos:*

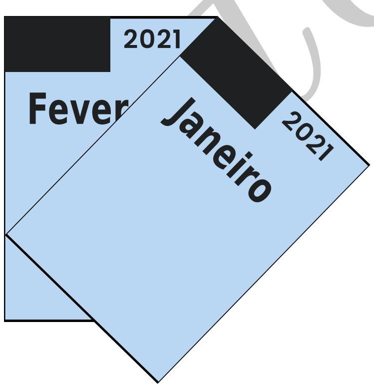
$$1 + 2 + 3 + \cdot + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2.$$

A solução que apresentaremos a seguir utiliza a estratégia de contagem dupla, uma técnica de demonstração de igualdades que consiste em contar os elementos de um conjunto de duas maneiras diferentes.

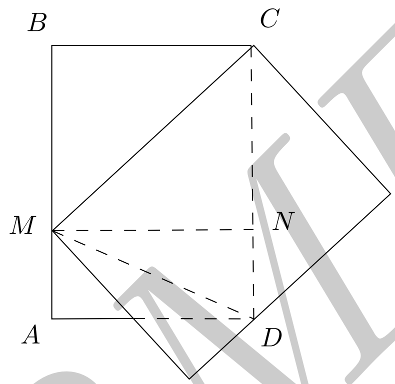
Solução. Para descobrir o padrão, faça um exemplo com $n = 5$ e desenhe $5^2 = 25$ pontos em um quadrado 5×5. Também podemos contar os pontos de outro modo contando ao longo das diagonais que vão para baixo e para a direita formando um ângulo de 45 graus. Comece no ponto na parte de baixo à esquerda no quadrado; há 1 ponto. Na próxima diagonal acima e à direita, há 2 pontos. Na terceira diagonal, há 3 pontos. Continue até a quinta diagonal, com 5 pontos. A sexta diagonal tem 4 pontos; a sétima tem 3 , e assim por diante até a última com 1 ponto. Temos, então, $1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5^2$. Se desenharmos um quadrado com n^2 pontos e contarmos ao longo das diagonais como acima, veremos que $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 1 = n^2$. □



Exercício 5. *Uma página, em um calendário, está parcialmente coberta por uma página anterior, como na figura. Qual parte tem área maior: a coberta ou a descoberta?*



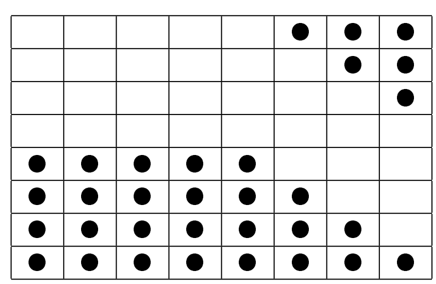
Solução. Desenhe as retas que representam as arestas cobertas da página. Desenhe também a reta MN que divide o retângulo $ABCD$ em dois retângulos. O retângulo $MBCN$ está coberto exatamente pela metade, enquanto que a parte coberta do retângulo $AMND$ é maior do que sua metade, como pode ser visto desenhando-se a diagonal MD. Logo a parte descoberta da página é menor do que a coberta. □



Exercício 6. *É possível colocar grãos de feijão nos quadrados de um tabuleiro 8×8 de modo que haja o mesmo número de grãos em duas colunas quaisquer e um número diferente de grãos em duas linhas quaisquer?*

Solução. Como cada linha pode conter de 0 a 8 grãos, existem 9 possibilidades ao todo. Para que cada linha contenha um número diferente de grãos, é preciso escolher oito dessas possibilidades e descartar uma. Como decidir qual deve ser descartada? O número total de grãos tem que ser divisível por 8 , já que são oito colunas e cada uma tem que ter o mesmo número de grãos. Temos $0 + 1 + \cdots + 8 = 36$; precisamos retirar um desses números e obter uma soma que é um múltiplo de 8. O único número com essa propriedade é 4. As linhas têm que conter $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7$ e 8 grãos, e, como há 32 grãos no total, cada coluna tem que conter 4 grãos.

O diagrama a seguir mostra que podemos colocar 4 grãos em cada coluna de modo que o número de grãos em linhas sucessivas seja $3, 2, 1, 0, 5, 6, 7$ e 8, todos números diferentes.



□

Exercício 7. *Uma fábrica de brinquedos produz pirâmides triangulares coloridas. Cada pirâmide tem quatro faces que são triângulos equiláteros, sendo um amarelo, outro vermelho, outro azul, e o último verde. Quantos padrões* *diferentes podem ser fabricados? E se for um cubo com 6 cores?*

Solução. Coloque uma pirâmide na sua frente com a face amarela para baixo e vire-a de modo que a face verde esteja voltada para você. Existem agora duas faces "atrás"que podem ser, da esquerda para a direita, vermelha e azul, ou azul e vermelha. Portanto, existem duas pirâmides diferentes.

Imagine que um exemplar de cada tipo diferente de cubo está sobre a mesa na sua frente. Coloque todos os cubos com a face amarela para baixo e divida os cubos em cinco pilhas de modo que a face de cima de todos os cubos em cada pilha tenham a mesma cor. Cada pilha terá um número igual de cubos, de modo que podemos contar o número de cubos em uma pilha e multiplicá-lo por 5 para encontrar o número total de cubos.

Vire os cubos com a face de cima vermelha de modo que as faces verdes estejam voltadas para você. A face de trás pode ser azul, branca ou preta. Para cada uma dessas três possibilidades, as duas cores que sobrarem podem estar a sua esquerda ou a sua direita. Por exemplo, se a face de trás for azul, a face à esquerda pode ser preta ou branca. Isso nos dá um total de $3 \times 2 = 6$ cubos na pilha com a face vermelha para cima. Portanto, há $5 \times 6 = 30$ cubos na mesa. □

2 Problemas Extras

Exercício 8. *Uma colônia de bactérias é invadida por um único vírus. Durante o primeiro minuto, esse vírus mata uma das bactérias e depois se divide em dois novos vírus; ao mesmo tempo, cada uma das bactérias restantes também se divide em duas. Durante o minuto seguinte, cada um dos dois vírus recém-nascidos mata uma bactéria cada e, em seguida, os dois vírus e todas as bactérias restantes se dividem novamente, e assim por diante. Esta colônia de bactérias viverá infinitamente ou acabará morrendo em algum momento?*

Solução. Seja V_t e B_t, respectivamente, o número de vírus e bactérias após t minutos. Então, $V_{t+1} = 2V_t$ e $B_{t+1} = 2(B_t - V_t)$. Agora note que

$$\frac{B_{t+1}}{V_{t+1}} = \frac{B_t}{V_t} - 1.$$

Assim, fazendo uma soma telescópica, temos que

$$\frac{B_n}{V_n} = \frac{B_0}{V_0} - n.$$

Como $\frac{B_0}{V_0}$ é fixo e n pode tornar-se tão grande quanto desejarmos, em algum momento a última bactéria morrerá. □

Exercício 9. *Sobre uma mesa há 14 moedas aparentemente iguais. Porém, sete são verdadeiras e sete são falsas. Adriano sabe quais são verdadeiras e quais são falsas, mas Bianca não. Ela sabe apenas que:*

- *Todas as moedas falsas têm peso iguais entre si.*
- *Todas as moedas verdadeiras têm peso iguais entre si.*
- *As moedas verdadeiras são mais pesadas dos que as falsas.*

Adriano pode comprovar para Bianca quais moedas são falsas por meio de três pesagens em uma balança de dois pratos?

Solução. Sejam $v_1, v_2, ..., v_7$ as moedas verdadeiras e $f_1, f_2, ..., f_7$ as moedas falsas. Adriano deve fazer então três pesagens:

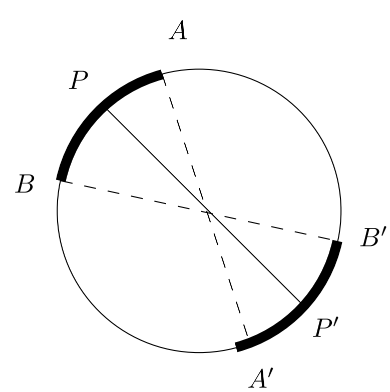
(i) v_1 contra f_1;

(ii) v_1, f_2, f_3 contra f_1, v_2, v_3;

(iii) $v_1, v_2, v_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ contra $f_1, f_2, f_3, v_4, v_5, v_6, v_7$;

Na primeira pesagem Bianca descobre que v_1 é verdadeira e f_1 é falsa. Na segunda pesagem, ela descobre que as moedas v_2, v_3 são verdadeiras e que f_2, f_3 são falsas. Pois, ao compararmos dois grupos de três moedas, o grupo mais pesado terá mais moedas falsas. Como o grupo v_1, f_2, f_3 é mais leve do que f_1, v_2, v_3, Bianca perceberá que em $\{f_1, v_2, v_3\}$ haverá pelo menos duas verdadeiras. Como ela já sabe que f_1 é falsa, chegará à conclusão de que v_2, v_3 são verdadeiras. Consequentemente, f_2, f_3 serão falsas. De modo análogo, Bianca concluirá após a terceira pesagem que as moedas f_4, f_5, f_6, f_7 são falsas e que as moedas v_4, v_5, v_6, v_7 são verdadeiras. □

Exercício 10. *Algumas cordas são desenhados em um círculo de raio 1, de modo que cada diâmetro do círculo não cruze mais do que k dessas cordas. Prove que a soma dos comprimentos de todos as cordas é menor que $k\pi$.*



Solução. Considere uma corda AB que é cortada pelo diâmetro PP', sendo P sobre o menor arco AB. Se A' e B' são os antípodas de A e B respectivamente, note que P' está sobre o arco $A'B'$. Perceba ainda que essa condição é necessária e suficiente para que um diâmetro cortar uma corda.

Agora, se a soma das cordas for maior do que $k\pi$, então a soma das medidas dos menores arcos associados a essas cordas também será maior do que $k\pi$. Portanto, ao considerarmos todos esses arcos e seus arcos antípodas, a soma das medidas desses arcos seria maior do que $2k\pi$. Consequentemente, existirá um ponto Q sobre a circunferência que estará em pelo menos $k+1$ desses arcos. Por fim, note que a diagonal passando por Q cortará $k+1$ das cordas. Absurdo! Logo, a soma das medidas das cordas deve ser menor que $k\pi$. $\square$

3 Sugestões aos Professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [3, 2]. Nestes, o professor poderá encontrar problemas separados em conjuntos que tratam sobre o mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela que comumente encontra-se nas aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a exporem suas ideias (mesmo que parcialmente incompletas ou inconsistente) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.

Observe que muitas das situações apresentadas nessa lista possuem diversas soluções ou podem ser modificados para gerar novas formas de exploração das ideias utilizadas na solução. Recomendamos que os professores utilizem essa estratégia para manter a turma motivada ao longo da aula.

Referências

[1] Sergey Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana*. IMPA, 2016.

[2] Dmitri Fomin, Ilia Itenberg, and Sergey Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*. IMPA, 2012.

[3] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória*. IMPA, 2018.