Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Diferenciação Implícita - Parte III

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de Agosto de 2025

Neste material, dedicamos a primeira seção ao exame de algumas noções necessárias ao entendimento do enunciado do Teorema da Função Implícita, reservando à segunda seção uma demonstração desse teorema no caso polinomial.

1 O Teorema da Função Implícita

Um *retângulo aberto* (ou, simplesmente, um *retângulo*) no plano é um produto cartesiano $I \times J$ de intervalos abertos I, J da reta. Caso esses intervalos sejam limitados e seus comprimentos coincidam, diremos que $I \times J$ é um *quadrado* (aberto). Quando I e J forem centrados em x_0 e y_0, respectivamente, diremos que o ponto (x_0, y_0) é o *centro* do retângulo $I \times J$.

Por exemplo, como $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ é um intervalo aberto, o plano $\mathbb{R}^2$ é um retângulo. Também, $\mathcal{R} = (-1, 1) \times (-2, 2)$ é um retângulo (que não é quadrado) centrado em $(0, 0)$.

Se $F = F(x, y)$ for uma função real de duas variáveis, seu *domínio maximal* é o conjunto $\mathcal{D}$ dos pontos (x, y) do plano tais que a regra que define $F(x, y)$ tenha sentido aritmético. Contudo, fixado um ponto (x_0, y_0) em $\mathcal{D}$, a fim de entender o comportamento de F quando $(x, y) \in \mathcal{D}$ estiver próximo a (x_0, y_0) é natural considerarmos, se possível, um retângulo $\mathcal{R}$, centrado em (x_0, y_0) e contido em $\mathcal{D}$.

Por exemplo, a regra $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$ determina uma função real de duas variáveis reais. Se estivermos interessados em analisar o comportamento de F quando (x, y) estiver próximo a $(0, 0)$, podemos olhar F como definida no retângulo $\mathcal{R} = (-1, 1) \times (-2, 2)$. Note, entretanto, que a regra para $F(x, y)$ faz sentido se, e somente se, $1 - x^2 \geq 0$, $4 - y^2 \geq 0$, condições equivalentes a $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$; portanto, o domínio maximal de F é o *retângulo fechado* $[-1, 1] \times [-2, 2]$.

Sejam $\mathcal{R} = I \times J$ um retângulo e $F = F(x, y)$ uma função real definida em $\mathcal{R}$. Para $(a, b) \in \mathcal{R}$, se a função real de uma variável real $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := F(x, b)$ possuir derivada em a, diremos que $g'(a)$ é a ***derivada parcial de F em relação a x no ponto (a, b)***. Analogamente, se a função $h : J \to \mathbb{R}$ dada por $h(y) := F(a, y)$ admitir derivada em b, a quantidade $h'(b)$ será a ***derivada parcial de F em relação a y no ponto (a, b)***.

Grosso modo, a derivada parcial de F em relação a x (resp. y) é obtida derivando-se F com respeito à variável x (resp. y), *considerando y (resp. x) como uma constante*. Por exemplo, para a função F tratada acima, em que $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$, as regras de derivação garantem que as derivadas parciais de F em relação às variáveis x e y, calculadas em um ponto $(x, y) \in \mathcal{R}$, têm expressões

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}},$$

respectivamente. Para mais um exemplo, a função G, cujo domínio é o plano e cuja regra é $G(x, y) = x^2 y - \cos y$, admite derivada parcial em relação a x igual a $2xy$ e derivada parcial em relação a y dada por $x^2 + \operatorname{sen} y$.

Supondo que uma função de duas variáveis F possua derivadas parciais num ponto (x, y) de seu domínio, denotaremos a derivada parcial em relação a x (resp. y) por $F_x(x, y)$ (resp. $F_y(x, y)$). Assim, os exemplos do parágrafo anterior se exprimem como

$$F_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad F_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$$

e

$$G_x(x, y) = 2xy, \qquad G_y(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} y.$$

Para os dois exemplos a seguir, recorde (conforme estabelecido na 2ª parte desse material) que toda função polinomial $F = F(x, y)$ admite uma representação na forma

$$F(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_n(x)y^n, \qquad (1)$$

em que $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ são funções polinomiais.

Exemplo 1. *Seja F uma função polinomial nas variáveis x, y expressa por* (1)*. Então,*

$$F_x(x, y) = a_0'(x) + a_1'(x)y + a_2'(x)y^2 + \ldots + a_n'(x)y^n$$

e

$$F_y(x, y) = a_1(x) + 2a_2(x)y + \ldots + na_n(x)y^{n-1}.$$

Exemplo 2. *Sejam $F = F(x, y)$ uma função polinomial e $y = y(x)$ uma função derivável, definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. Prove que*

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0 \tag{2}$$

para todo x no domínio de y [1]*.*

Solução. Podemos supor que $F(x, y)$ satisfaz a relação (1). Assim, fazendo $y = y(x)$, teremos

$$a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_n(x)y^n = 0$$

para todo x no domínio de y. Logo, para tais x, as regras de derivação implicam

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d(a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \ldots + a_n(x)y^n)}{dx} \\
&= a_0'(x) + (a_1'(x)y + a_1(x)y') + (a_2'(x)y^2 + 2a_2(x)yy') \\
&\quad + \ldots + (a_n'(x)y^n + na_n(x)y^{n-1}y') \\
&= (a_0'(x) + a_1'(x)y + a_2'(x)y^2 + \ldots + a_n'(x)y^n) \\
&\quad + (a_1(x) + 2a_2(x)y + \ldots + na_n(x)y^{n-1})y' \\
&= F_x(x, y) + F_y(x, y)y',
\end{aligned}$$

em que as fórmulas do exemplo 1 foram utilizadas na última igualdade. □

Vimos acima que, pelo menos quando F for polinomial, o processo de diferenciação implícita da relação $F(x, y) = 0$ leva à igualdade (2), a qual implica

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \tag{3}$$

caso $F_y(x, y) \neq 0$.

[1] Por conveniência, escreveremos y e y' ao invés de $y(x)$ e $y'(x)$.

Inversamente, se F for uma função "bem comportada", as condições $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ implicarão a existência de uma função derivável $y = f(x)$, definida implicitamente pela relação $F(x, y) = 0$ e satisfazendo (3). Em essência, esse é o conteúdo do *Teorema da Função Implícita.*

Para enunciar esse resultado, precisaremos definir a noção de continuidade para funções reais de duas variáveis reais, o que pode ser feito com uma simples adaptação na definição da noção correlata para funções reais de uma variável real.

Para tanto, recordamos que uma função real de uma variável real $g : I \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in I$ se, e somente se, para cada margem de erro $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para $x \in I$, tenhamos

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Em palavras, a distância de $g(x)$ a $g(x_0)$ deve ser controlada pela distância de x a x_0, com $x \in I$.

Analogamente, dada uma função $G = G(x, y)$, com domínio em um subconjunto $\mathcal{D}$ do plano, sua continuidade no ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ equivale ao fato de a distância de $G(x, y)$ a $G(x_0, y_0)$ na reta ser controlada pela distância de (x, y) a (x_0, y_0) no plano; como essa última distância é controlada pelas distâncias de x a x_0 e de y a y_0 na reta, temos a seguinte

Definição 3. *Uma função $G = G(x, y)$, definida em um subconjunto $\mathcal{D}$ do plano, é* contínua no ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ *se, para cada margem de erro $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para $(x, y) \in \mathcal{D}$, tenhamos*

$$|x - x_0|, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |G(x, y) - G(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Note que um intervalo aberto J da reta, centrado em $G(x_0, y_0)$, é da forma $J = (G(x_0, y_0) - \varepsilon, G(x_0, y_0) + \varepsilon)$, enquanto um quadrado $\mathcal{Q}$ no plano, de centro (x_0, y_0), é da forma $\mathcal{Q} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$; por sua vez, as condições $|G(x, y) - G(x_0, y_0)| < \varepsilon$ e $|x - x_0|, |y - y_0| < \delta$ equivalem a $G(x, y) \in J$ e $(x, y) \in \mathcal{Q}$, respectivamente.

Portanto, a definição de continuidade de $G = G(x, y)$, dada como acima, em $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ pode ser refraseada da seguinte forma: G é contínua em $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ se, para cada intervalo aberto J centrado em $G(x_0, y_0)$, existir um quadrado aberto $\mathcal{Q}$ centrado em (x_0, y_0) tal que

$$(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{Q} \Rightarrow G(x, y) \in J.$$

(Isto é, G aplica $\mathcal{D} \cap \mathcal{Q}$ em J.)

Uma função $G = G(x, y)$, de domínio $\mathcal{D}$, é **contínua** (em $\mathcal{D}$) se G for contínua em cada ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Exemplo 4. *Não é difícil mostrar que as funções adição e multiplicação,*

$$\begin{array}{rrcl} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rrcl} M: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

são contínuas. Mais geralmente, qualquer polinômio $G(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ *determina uma função contínua do plano na reta.*

Para o Teorema da Função Implícita, nosso interesse não é propriamente em funções contínuas, mas em funções com *derivadas parciais contínuas.*

Definição 5. *Seja $\mathcal{R}$ um retângulo no plano. Uma função $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ é **de classe C^1**, ou **continuamente derivável**, se as derivadas parciais de F existirem em todos os pontos de $\mathcal{R}$ e as funções F_x, $F_y : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ forem contínuas.*

Por exemplo, funções polinomiais de duas variáveis são de classe C^1, uma vez que suas derivadas parciais (existem e) também são funções polinomiais, logo, contínuas.

Podemos finalmente enunciar o

Teorema 6 (da Função Implícita). *Sejam $\mathcal{R}$ um retângulo aberto, $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Se $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, então existe uma função derivável $y = f(x)$, cujo domínio é um intervalo aberto contendo x_0, definida implicitamente por $F(x, y) = 0$ e cumprindo a condição $f(x_0) = y_0$. Além disso, para cada x no domínio de f, tem-se*

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \tag{4}$$

Uma prova da versão geral desse teorema pode ser encontrada em livros de cálculo/análise de funções de várias variáveis (vide [1], por exemplo). Para o caso em que F é um polinômio, confira a próxima seção.

Observação 7. *O leitor pode estar se perguntando* quantas *funções $y = f(x)$, nas condições do teorema anterior, podem existir. A resposta é "essencialmente, apenas uma". Isso costuma fazer parte do enunciado do Teorema da Função Implícita sob a seguinte forma:* escolhendo convenientemente o domínio I da função f, existe um intervalo aberto J_0, para o qual o retângulo $I \times J_0$ contém o gráfico de f, de tal modo que um ponto $(a, b) \in I \times J_0$ é um *zero* da função F (ou seja, $F(a, b) = 0$) se, e somente se, $b = f(a)$.

Geometricamente, isso significa que a parte do conjunto de zeros da função F contida no retângulo $I \times J_0$ é, precisamente, o gráfico da função f. Assim, se uma outra função g satisfizer as mesmas condições que f enunciadas no teorema, f e g deverão coincidir na interseção de seus domínios.

Observação 8. *Se $g, h : I \to \mathbb{R}$ e $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ forem contínuas, sendo $(g(x), h(x))$ um ponto de $\mathcal{D}$, para cada $x \in I$, prova-se que a função "composta" $\psi : I \to \mathbb{R}$, de regra $\psi(x) = F(g(x), h(x))$, também é contínua*[2]*. Portanto, a fórmula* (4) *e a continuidade das derivadas parciais F_x, F_y mostram que a função $f : I \to \mathbb{R}$, obtida via teorema 6, é de classe C^1, ou seja, a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é contínua.*

2 O teorema no caso polinomial

Comecemos com o seguinte

Lema 9. *Sejam P um polinômio em duas variáveis, (x_0, y_0) um ponto do plano e $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Então, existem polinômios $Q = Q(x, y)$ e $R = R(y)$ tais que*

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + Q(x, y)\Delta x + R(y)\Delta y, \qquad (5)$$

[2]A demonstração segue as mesmas linhas da prova de que *a composição de funções contínuas ainda é contínua*, apresentada na 3ª parte da 1ª aula do módulo *Funções Contínuas*.

com $Q(x_0,y_0)=P_x(x_0,y_0)$ *e* $R(y_0)=P_y(x_0,y_0)$*.*

Prova. Escreva

$$P(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j,$$

em que omitimos as variações dos índices i e j para simplificar a escrita e interpretamos as ocorrências de x^0 ou y^0 como 1. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}P(x,y)&=P(x_0,y_0)+\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j-\sum_{i,j}a_{ij}x_0^iy_0^j\\&=P(x_0,y_0)+\sum_{i,j}a_{ij}(x^i-x_0^i)y^j+\sum_{i,j}a_{ij}x_0^i(y^j-y_0^j)\\&=P(x_0,y_0)+\sum_{i,j}a_{ij}\left(\frac{x^i-x_0^i}{x-x_0}\right)y^j\cdot(x-x_0)\\&\quad+\sum_{i,j}a_{ij}x_0^i\left(\frac{y^j-y_0^j}{y-y_0}\right)(y-y_0)\\&=P(x_0,y_0)+\tilde{Q}(x,y)(x-x_0)+\tilde{R}(y)(y-y_0),\end{aligned}$$

em que

$$\tilde{Q}(x,y)=\sum_{i>0,j}a_{ij}\left(\frac{x^i-x_0^i}{x-x_0}\right)y^j$$

para $x\neq x_0$ e

$$\tilde{R}(y)=\sum_{j>0,i}a_{ij}x_0^i\left(\frac{y^j-y_0^j}{y-y_0}\right)$$

para $y\neq y_0$.

Agora, perceba que, para $x\neq x_0$, temos

$$\tilde{Q}(x,y)=\sum_{i>0,j}a_{ij}(x^{i-1}+x^{i-2}x_0+\ldots+x_0^{i-1})y^j, \quad (6)$$

um polinômio; também, para $y\neq y_0$, temos

$$\tilde{R}(y)=\sum_{j>0,i}a_{ij}x_0^i(y^{j-1}+y^{j-2}y_0+\ldots+y_0^{j-1}), \quad (7)$$

outro polinômio. Portanto, definindo (para todos x, y) $Q(x, y)$ pelo segundo membro de (6) e $R(y)$ pelo segundo membro de (7), obtemos polinômios tais que

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + Q(x, y)(x - x_0) + R(y)(y - y_0)$$

para todos x, y. Em particular,

$$P(x, y_0) = P(x_0, y_0) + Q(x, y_0)(x - x_0), \ \forall x$$

e

$$P(x_0, y) = P(x_0, y_0) + R(y)(y - y_0), \ \forall y.$$

Por fim, segue daí que

$$\begin{aligned} P_x(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{P(x, y_0) - P(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} Q(x, y_0) = Q(x_0, y_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_y(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{P(x_0, y) - P(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} R(y) = R(y_0). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma versão do Teorema de Permanência do Sinal para funções polinomiais em duas variáveis. Antes, vale observar que toda função polinomial $A = A(x, y)$ é *localmente limitada*, ou seja, dado um quadrado $\mathcal{Q}$ do plano, existe uma constante K tal que

$$|A(x, y)| \leq K, \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{Q}. \tag{8}$$

Para justificar essa afirmação, note que todo quadrado do plano está contido em algum quadrado centrado na origem [3]. Assim, se $\mathcal{Q}$ estiver contido no quadrado $(-r, r) \times (-r, r)$,

[3] Se $\mathcal{Q} = (a, b) \times (c, d)$, então $\mathcal{Q}$ está contido no quadrado $(-r, r) \times (-r, r)$, em que $r := \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$.

teremos $|x|, |y| \le r$ para todo ponto $(x,y) \in \mathcal{Q}$; daí, se $A(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$, a desigualdade triangular dará

$$|A(x,y)| \le \sum_{i,j} |a_{ij}||x|^i |y|^j \le \sum_{i,j} |a_{ij}| r^{i+j},$$

para cada $(x,y) \in \mathcal{Q}$. Logo, pondo $K := \sum_{i,j} |a_{ij}| r^{i+j}$, segue a relação (8).

Lema 10. *Seja A uma função polinomial em duas variáveis, positiva no ponto (x_0, y_0). Então, A ainda é positiva em algum quadrado centrado em (x_0, y_0).*

Prova. Pelo lema 9, com $P = A$, temos

$$A(x,y) = A(x_0,y_0) + Q(x,y)\Delta x + R(y)\Delta y,$$

para certos polinômios Q, R, em que $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Pelas observações acima, Q e R são limitados no quadrado $\mathcal{Q}_1 := (x_0 - 1, x_0 + 1) \times (y_0 - 1, y_0 + 1)$, digamos

$$|Q(x,y)|, |R(y)| \le K,$$

para alguma constante positiva K, sempre que $(x,y) \in \mathcal{Q}_1$. Logo, se $\delta = \min\{1, A(x_0,y_0)/4K\}$, então $\delta > 0$ e o quadrado $\mathcal{Q} := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contido no quadrado $\mathcal{Q}_1$. Portanto, para cada $(x,y) \in \mathcal{Q}$, teremos

$$\begin{aligned} A(x,y) &\ge A(x_0,y_0) - |Q(x,y)||\Delta x| - |R(y)||\Delta y| \\ &> A(x_0,y_0) - K\delta - K\delta = A(x_0,y_0) - 2K\delta \\ &\ge A(x_0,y_0) - 2K \cdot \frac{A(x_0,y_0)}{4K} \\ &= \frac{A(x_0,y_0)}{2} > 0, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. □

O resultado seguinte é a versão polinomial do teorema da função implícita (6).

Teorema 11. *Seja P uma função polinomial em duas variáveis tal que $P(x_0, y_0) = 0$ e $P_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então, existem um intervalo aberto I centrado em x_0 e uma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$ e $P(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Além disso,*

$$f'(x) = -\frac{P_x(x, f(x))}{P_y(x, f(x))}.$$

Prova. Suponhamos $P_y(x_0, y_0) > 0$, sem perda de generalidade.

`Afirmação.` Existem um intervalo aberto I centrado em x_0 e um intervalo fechado J centrado em y_0 tais que:

(a) para cada $x \in I$, a função $y \mapsto P(x, y)$ assume valores de sinais opostos nas extremidades de J;

(b) $P_y(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in I \times J$.

Com efeito, fazendo $A = P_y$ no lema 10, obtemos um quadrado $\mathcal{Q}$, centrado em (x_0, y_0), no qual a derivada parcial P_y é positiva. Por outro lado, a função polinomial h_0, definida por $h_0(y) = P(x_0, y)$, se anula em y_0 e é crescente nesse ponto, haja vista que $h_0'(y_0) = P_y(x_0, y_0) > 0$. Então, existe um intervalo $J = [y_1, y_2]$, centrado em y_0, tal que h_0 é negativa em $[y_1, y_0)$ e positiva em $(y_0, y_2]$. Diminuindo o raio do intervalo J, se necessário, podemos supor que $\{x_0\} \times J \subset \mathcal{Q}$.

Como as funções polinomiais $x \mapsto g_1(x) := P(x, y_1)$ e $x \mapsto g_2(x) := P(x, y_2)$ assumem em x_0 um valor negativo e um valor positivo, respectivamente, o Teorema de Permanência do Sinal garante a existência de intervalos abertos I_1, I_2, centrados em x_0, tais que g_1 é negativa em I_1 e g_2 é positiva em I_2. Se I for o menor desses intervalos (ou seja, $I = I_1 \cap I_2$), então $g_1|_I$ será negativa e $g_2|_I$ será positiva. Mais uma vez, diminuindo, se necessário, o raio do intervalo I, podemos admitir que $I \times J \subset \mathcal{Q}$. Dessa forma, I e J cumprem as condições (a) e (b) da afirmação.

Para definir a função f, note que, para cada $x \in I$, a função polinomial $h : J \to \mathbb{R}$, dada por $h(y) = P(x,y)$, é crescente, pois sua função derivada $J \ni y \mapsto h'(y) = P_y(x,y)$ é positiva. Além disso, h assume valores de sinais opostos nos extremos do intervalo J. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, concluímos a existência de um *único* ponto $f(x) \in J$ anulando h, ou seja, tal que $P(x, f(x)) = 0$. Isso determina uma função $f : I \to J$, com $f(x_0) = y_0$, definida implicitamente por P. (Note que os valores de f pertencem ao *interior* J_0 do intervalo J.)

Para encerrar, precisamos demonstrar que f é derivável, sendo sua derivada expressa pela fórmula do enunciado. Começaremos provando que f é contínua. De fato, fixados $a \in I$ e uma margem de erro $\varepsilon > 0$, não há mal em supor que $[f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon] \subset J$. Então, utilizando mais uma vez o fato de que a função $J \ni y \mapsto P(a,y)$ é crescente, obtemos

$$P(a, f(a) - \varepsilon) < P(a, f(a)) = 0 < P(a, f(a) + \varepsilon).$$

Repetindo o argumento do 3ª parágrafo, vemos que existe um intervalo I' centrado em a e de raio $\delta > 0$, digamos, tal que

$$P(x, f(a) - \varepsilon) < 0 < P(x, f(a) + \varepsilon)$$

para todo $x \in I'$. Como antes, deve haver y_x no intervalo $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ tal que $P(x, y_x) = 0$. Levando em conta que $y_x \in J$ e que o único ponto y de J satisfazendo $P(x,y) = 0$ é $y = f(x)$, concluímos a relação $y_x = f(x)$. Acabamos, pois, de demonstrar a validade da implicação

$$x \in I' \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon),$$

ou seja,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Isso assegura a continuidade de f.

Agora, ainda supondo $a, x \in I$, com $x \neq a$, sejam

$$b := f(a),\ \Delta x := x - a,\ \Delta y := f(x) - b.$$

Nessas notações, para mostrar que f é derivável no ponto a, estabelecendo a fórmula do enunciado, basta provar que

$$\lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{Q(a,b)}{R(b)},$$

sendo Q e R os polinômios da relação (5), com x_0, y_0 substituídos por a, b.

Fazendo $y = f(x)$ no lema 9 e observando que $P(x,y) = P(a,b) = 0$, vem

$$\phi(x)\Delta x + \varphi(x)\Delta y = 0,$$

para todo $x \in I$, sendo

$$\phi(x) := Q(x, f(x)),\ \varphi(x) := R(f(x)).$$

Essas regras definem funções $\phi, \varphi : I \to \mathbb{R}$, as quais são *contínuas* pela continuidade de f. Com efeito, Q e R são polinômios, de sorte que as expressões para $\phi(x)$ e $\varphi(x)$ consistem de somas de múltiplos de produtos da forma $x^i f(x)^j$, logo, contínuas.[4]

Assim, a igualdade

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$$ [5]

implica

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \left(-\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \right) \\ &= -\frac{\phi(a)}{\varphi(a)} = -\frac{Q(a,b)}{R(b)}. \end{aligned}$$

□

[4]Confira o teorema 17 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III*, do módulo *Funções Contínuas*.

[5]Note que $\varphi(a) = R(b) = P_y(a,b) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$ para todo x suficientemente próximo de a.

Observação 12. *É possível obter uma demonstração do caso geral do Teorema da Função Implícita 6 a partir dos argumentos apresentados nessa seção. O ponto crucial é a seguinte versão do lema 9, cuja generalização às funções de várias variáveis a valores vetoriais costuma ser atribuída ao matemático americano Marston Morse:* Se $\mathcal{R}$ for um retângulo contendo o ponto (x_0, y_0) e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ for de classe C^1, então existem funções contínuas $G, H : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ tais que[6]

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + G(x, y)\Delta x + H(x, y)\Delta y \qquad (9)$$

para cada $(x, y) \in \mathcal{R}$. Além disso, $G(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)$ e $H(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0)$.

O resultado explicado na observação anterior é uma espécie de extensão, para funções reais de duas variáveis reais, da proposição 1 da aula *Regra da Cadeia - Demonstração.* Aliás, dele segue a seguinte versão da regra da cadeia.

Proposição 13. *Sejam $\mathcal{R}$ um retângulo e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função de* classe C^1. *Se $g, h : I \to \mathbb{R}$ forem funções deriváveis tais que o ponto $(g(t), h(t))$ pertence a $\mathcal{R}$, para cada $t \in I$, então a função composta $f : I \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = F(g(t), h(t))$, será derivável e*

$$f'(t) = F_x(g(t), h(t))g'(t) + F_y(g(t), h(t))h'(t) \qquad (10)$$

para todo $t \in I$.

Prova. Fixado $t_0 \in I$, façamos $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$, $x = g(t)$ e $y = h(t)$ em (9), obtendo

$$\Delta f = G(g(t), h(t))\Delta g + H(g(t), h(t))\Delta h,$$

em que $\Delta f = f(t) - f(t_0)$, etc. Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\Delta t = t - t_0$ e fazendo $\Delta t \to 0$, obtemos, via observação 8, a diferenciabilidade de f e a relação (10). $\square$

Encerramos este material com o seguinte

[6]Note que, nesse caso mais geral, não é possível garantir que H dependa somente de y.

Exemplo 14 (Putnam - 2010). *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *tal que*

$$F(x, y) = aF_x(x, y) + bF_y(x, y) \tag{11}$$

para certas constantes a, b. *Se* F *for limitada, mostre que* F *é identicamente nula.*

Solução. Fixado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = F(x_0 + at, y_0 + bt).$$

Pela proposição anterior, f é derivável e

$$\begin{aligned} f'(t) &= F_x(x_0 + at, y_0 + bt) \cdot \frac{d(x_0 + at)}{dt} \\ &\quad + F_y(x_0 + at, y_0 + bt) \cdot \frac{d(y_0 + bt)}{dt} \\ &= aF_x(x_0 + at, y_0 + bt) + bF_y(x_0 + at, y_0 + bt) \\ &= F(x_0 + at, y_0 + bt) = f(t), \end{aligned}$$

sendo que a relação (11) foi utilizada na penúltima igualdade. Pelo exemplo 2 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*, segue que $f(t) = f(0)e^t$, ou seja,

$$F(x_0 + at, y_0 + bt) = F(x_0, y_0)e^t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Se fosse $F(x_0, y_0) \neq 0$, valeria

$$\lim_{t \to +\infty} |F(x_0 + at, y_0 + bt)| = |F(x_0, y_0)| \cdot \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty,$$

contradizendo a suposição de que F é limitada. Logo, devemos ter $F(x_0, y_0) = 0$, o que, pela arbitrariedade do ponto (x_0, y_0), mostra que $F \equiv 0$. $\square$

Dicas para o Professor

Em todos os exemplos da 1ª e 2ª partes dessa aula, a diferenciação implícita de uma relação $F(x, y) = 0$ resultou numa igualdade da forma

$$y' = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \tag{12}$$

em que F_x e F_y são as derivadas parciais de F, conforme definidas na seção 1. Muito embora o objetivo dos exemplos seja treinar o estudante em mais uma etapa do cálculo diferencial de funções reais de uma variável real, paralelamente à aprendizagem mecânica, uma questão ganha força: *a fórmula* (12) *realmente representa a derivada de alguma função definida implicitamente pela relação $F(x, y) = 0$?* Supondo que $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ seja de classe C^1, temos uma resposta direta para essa pergunta, de acordo com o Teorema 6: *sim, desde que exista um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Resumindo, *o Teorema da Função Implícita garante o significado de $y' = -F_x(x, y)/F_y(x, y)$, o resultado de um cálculo por diferenciação implícita, desde que essa relação faça sentido (i.e., desde que o denominador no 2º membro não se anule) em um zero de F.*

Para entender como poderíamos operar no vazio se nos concentrássemos apenas na diferenciação implícita em si, ignorando as condições acima, considere a relação

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0. \tag{13}$$

Escrevendo o primeiro membro dessa igualdade na forma $(x-3)^2 + (y-4)^2$, teríamos (13) equivalente a $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0$, equação cuja única solução é $(x, y) = (3, 4)$. Portanto, para $F(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$, a relação $F(x, y) = 0$ *não define implicitamente* nenhuma função derivável! Por outro lado, se diferenciarmos (13) implicitamente, obteremos $y' = \frac{x-3}{y-4}$, uma fórmula "vazia" com respeito à relação considerada. Ademais, como não poderia deixar de ser, o fato de não haver solução derivável $y = f(x)$ para $F(x, y) = 0$ concorda com a impossibilidade de encontrarmos um ponto (x_0, y_0) satisfazendo $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. De fato, sendo $F_y(x, y) = 2(y-4)$, temos $F_y(x_0, y_0) \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq 4$, enquanto $y_0 \neq 4 \Rightarrow F(x_0, y_0) \neq 0$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume* 2. 12ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

2. G. B. Thomas. *Cálculo, vol.* 1. 11ª ed. São Paulo: Pearson, 2009.