

Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

A Noção de Razão e Exercícios

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

**Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto**



1 Introdução

Neste módulo, aprederemos uma forma de expressar a ideia de razão entre duas grandezas. Por exemplo, quando dizemos que a razão do número de vitórias pelo número de derrotas de um determinado time de basquete é de 2 : 3 (leia 2 para 3), estamos dizendo (por definição) que, se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador igual ao número de derrotas, então esta fração será **equivalente** à fração $\frac{2}{3}$.

Como uma possibilidade, suponha que o número de vitórias seja igual a 18 e o de derrotas igual a 27. Então, se construirmos a fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas, teremos:

$$\frac{18}{27} = \frac{2 \cdot \cancel{9}}{3 \cdot \cancel{9}} = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado, observe que se um segundo time tiver a mesma razão entre os números de vitórias e derrotas, isso não necessariamente significa que os dois times possuam a mesma quantidade de vitórias. De fato, se este segundo time possuía 36 vitórias e 54 derrotas, teremos novamente

$$\frac{26}{54} = \frac{2 \cdot \cancel{18}}{3 \cdot \cancel{18}} = \frac{2}{3}.$$

Os exemplos acima chamam atenção para o que talvez seja o fato principal sobre razões: **uma razão é uma medida relativa, e não absoluta.**

Utilizemos esse conceito para resolver nosso primeiro exercício:

Exercício 1. O dono de uma revenda de veículos tem um total de 77 automóveis. A razão entre veículos novos e usados é de 4 : 3. Quantos são os carros novos?

Solução. Primeiramente, faremos uma tabela com algumas das possibilidades cuja razão entre veículos novos e usados seja 4 : 3:

Novos	Usados	Total
4	3	7
8	6	14
12	9	21
...
4x	3x	77

Utilizando o padrão da tabela, quando o total de carros for 77, devemos ter $4x + 3x = 77$, de forma que $7x = 77$ ou, o que é o mesmo, $x = 11$. Portanto, teremos $x = 44$ carros novos. □

Uma outra forma de resolvermos o exercício anterior é utilizando um sistema de equações com duas incógnitas. Veja a seguir:

Solução. Considere que a loja possuía x carros novos e y carros usados. Como o total de veículos é 77, temos

$x + y = 77$, de forma que $y = 77 - x$. Por outro lado, a razão entre novos e usados é 4 : 3. Portanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x}{77 - x} = \frac{4}{3}.$$

Resolvendo a última equação multiplicando em cruz, temos que

$$3x = 4(77 - x) \Rightarrow 3x = 308 - 4x$$

$$7x = 308 \Rightarrow x = 44.$$

Logo, temos 44 carros novos. □

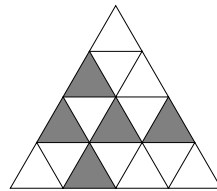
Razões também transmitem a ideia de *proporcionalidade direta*. Por exemplo, se em uma sala a razão de meninos para meninas é de 5 para 6 e cada menino está segurando um cartão vermelho e cada menina está segurando um cartão azul, então a razão entre cartões vermelhos e azuis também será de 5 para 6.

Mais geralmente, o mesmo sucede se cada menino estiver segurando y cartões vermelhos e cada menina estiver segurando y cartões azuis. De fato, sendo respectivamente $5x$ e $6x$ os números de meninos e de meninas, teremos $5x \cdot y = 5xy$ cartões vermelhos e $6x \cdot y = 6xy$ cartões azuis, de forma que a razão entre as quantidades de cartões vermelhos e azuis será

$$\frac{5xy}{6xy} = \frac{5}{6}.$$

O exemplo a seguir explora essa ideia.

Exercício 2. A figura a seguir mostra um triângulo de área 1200, dividido em vários triângulos iguais. Qual é a razão entre a área total da região cinza e a área total da região branca?



Solução. Veja que o triângulo maior está dividido em 16 triângulos iguais. Destes, 5 são cinzas e 11 são brancos. Como todos possuem a mesma área, a razão pedida é simplesmente $\frac{5}{11}$.

Exercício 3. Em um grupo de intercâmbio, a razão entre brasileiros e estrangeiros era de 3 : 4. Se cada brasileiro possuía duas canetas e um caderno e cada estrangeiro possuía uma caneta e dois cadernos, calcule a razão entre os números de canetas e cadernos.

Solução. Suponha que existam x brasileiros e y estrangeiros. Pela razão mencionada no enunciado, devemos ter

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot y.$$

Também pelo enunciado, o número de canetas deve ser igual a $2x + y$ e o número de cadernos deve ser igual a $x + 2y$. Substituindo x por $\frac{3y}{4}$ nessas duas expressões, obtemos:

- $2x + y = 2 \cdot \frac{3y}{4} + y = \frac{5y}{2}$ canetas.
- $x + 2y = \frac{3y}{4} + 2y = \frac{11y}{4}$ cadernos.

Dividindo um valor pelo outro, encontramos:

$$\frac{\frac{5y}{2}}{\frac{11y}{4}} = \frac{5y}{2} \cdot \frac{4}{11y} = \frac{10}{11}.$$

Portanto, a razão entre canetas e cadernos é $10 : 11$. \square

2 Razões no dia-a-dia

Em nosso cotidiano, é fácil deparar-mo-nos com medidas que refletem o conceito de razão. Um dos exemplos mais comuns é a velocidade. Quando dizemos que um carro está andando a uma velocidade constante de 40km/h , isso significa que ele percorrerá 40km em uma hora, 80km em duas horas ou 20km em meia hora, se mantiver essa velocidade sem parar.

Por outro lado, você deve ter percebido que, mesmo que em um certo momento um carro esteja a uma velocidade de 40km/h , ele poderá demorar até mais de uma hora para percorrer trajetos mais curtos do que 40km quando estiver trafegando na cidade. Isso ocorre nesse caso porque a velocidade de 40km/h não será constante. De outra forma, o carro poderá passar algum tempo parado nos semáforos, ou mesmo ficar "preso" em um engarrafamento. Todas essas situações diminuem a **velocidade média** do automóvel, que é definida como a distância total percorrida dividida pelo tempo total gasto para percorrê-la. Portanto, a velocidade média nada mais é do que uma razão.

Exercício 4. A distância entre a casa de Pedro até uma feira cultural é de 15km . Seu pai levou-o até lá de carro, gastando 45 minutos. Pergunta-se:

- Qual foi a velocidade média da viagem, em quilômetros por hora?
- Mantida essa mesma velocidade média por $1\text{h}30\text{m}$, que distância o pai de Pedro percorrerá?

Solução. Para responder o item (a), observe que 45 minutos correspondem a $\frac{3}{4}$ de hora. Daí, para obter a velocidade média, basta calcular a fração:

$$\frac{15\text{km}}{\frac{3}{4}\text{h}} = 15 \cdot \frac{4}{3}\text{km/h} = 20\text{km/h}.$$

Quanto a (b), como a velocidade média é a razão entre a distância d percorrida (em quilômetros) e o tempo de

percurso (em horas), e $1\text{h}30\text{m} = \frac{3}{2}\text{h}$, nesse caso devemos ter

$$\frac{d}{\frac{3}{2}} = 20,$$

de modo que $d = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30\text{km}$. \square

Ainda em relação ao exercício acima, note que mesmo que o pai de Pedro tenha dirigido a uma velocidade superior em alguns momentos, possíveis congestionamentos e tempo parado nos semáforos diminuíram a velocidade média do veículo.

Outro razão de presença cotidiana e que merece nossa atenção é o conceito de *densidade* de um objeto, que é definida pelo quociente entre a massa desse objeto e seu volume. Escrevemos, portanto,

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}.$$

Considere, por exemplo, a Tabela 1, a qual mostra a densidade da água em diversas temperaturas¹:

Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	Densidade (kg/m^3)
100	958,4
80	971,8
60	983,2
40	992,2
30	995,6502
25	997,0479
22	997,7735
20	998,2071
15	999,1026
10	999,7026
4	999,972
0	999,8395

Tabela 1: densidade da água x temperatura.

De acordo com a tabela, quando a água está a uma temperatura de 40°C , temos que $992,2$ quilogramas desse líquido ocupam um volume de 1 metro cúbico. Por outro lado, uma vez que densidade nada mais é do que uma razão, em um volume de água de 3 metros cúbicos e à temperatura de 60°C , teremos (novamente pela tabela) uma massa m de água (em quilogramas) tal que

$$\frac{m}{3} = 983,2.$$

Assim, $m = 3 \cdot 983,2 = 2949,6\text{kg}$.

Observe que, quando temos dois objetos com densidades diferentes em um mesmo ambiente e pelo menos um deles está no estado líquido ou gasoso, a diferença entre as densidades pode ser facilmente observada, pois o objeto de

¹Fonte: Wikipédia.

menor densidade tenderá a estar *acima* do objeto de maior densidade. É este fenômeno que explica por que os balões de ar quente sobem quando as chamas são acionadas: isto ocorre devido à menor densidade do ar quente em relação ao ar frio. É também por esse motivo que os aparelhos de ar condicionado devem ser instalados nas partes superiores das paredes, pois o ar frio (mais denso) tende a descer, enquanto o ar quente (menos denso) tende a subir.

Outro exemplo prático de comparação entre densidades (e, portanto, entre razões), mas que funciona de forma contrária à esperada, é a relação entre o gelo e água. Quando a água congela, ela passa a ter uma densidade *menor* (a explicação para esse fenômeno reside na *estrutura cristalina* do gelo, mas não vem ao caso aqui). Realmente, de acordo com a Tabela 1, a densidade da água a 4°C é de $999,97\text{kg}/\text{m}^3$, ao passo que a 0°C é de $999,83\text{kg}/\text{m}^3$. É por isso que o gelo flutua sobre a água.

Exercício 5. Um grupo de alunos, supervisionados por um professor, encheram completamente um tanque de 1m^3 de volume com água a 80°C . Então, eles esperaram a água esfriar até atingir a temperatura ambiente. Em seguida, verificaram que a água havia "perdido" aproximadamente 2% de seu volume. Qual era, aproximadamente, a temperatura ambiente? Use a Tabela 1 para obter a resposta e ignore perdas de água por evaporação.

Solução. Inicialmente, como a água estava a 80 graus e o tanque estava completamente cheio, pela tabela podemos assegurar que a massa de água era de 971,8 quilogramas. Por outro lado, após a água ter esfriado, o tanque estará com um volume de água 2% menor, ou seja, teremos um volume de $0,98\text{m}^3$ de água. Portanto, a densidade deve ser igual a

$$\frac{971,8}{0,98} = 991,63.$$

Examinando a Tabela 1, esse valor corresponde a uma temperatura de aproximadamente 40°C . \square

Observação: é curioso notar que o exercício que acabamos de resolver traz o princípio básico de funcionamento do termômetro de mercúrio. O mercúrio é um metal que, à temperatura ambiente, é líquido; por outro lado, assim como a água, ele também muda sua densidade de acordo com a temperatura. Em um termômetro, essa mudança de densidade com a temperatura, de uma massa fixa de mercúrio encerrada em uma fina coluna, faz com que a altura da coluna de mercúrio varie ao longo de uma escala graduada, exatamente como vemos ao medir a temperatura de alguém que está com febre.

3 Exercícios propostos

Finalizamos esta aula resolvendo alguns exercícios que ajudarão a fixar o conteúdo aprendido. É importante que o

aluno dedique algum tempo pensando por conta própria antes de ler cada solução.

Exercício 6. Um caminhão pode levar 300 sacos de cimento ou 7290 tijolos. Se o veículo já foi carregado com 100 sacos de cimento, quantos tijolos ainda poderemos colocar?

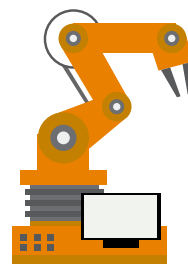


Solução. Observe que 300 sacos de cimento correspondem à capacidade total do caminhão. Assim, quando este é carregado com 100 sacos, $\frac{1}{3}$ de sua capacidade terá sido utilizada, restando ainda $\frac{2}{3}$. Agora, veja que

$$\frac{2}{3} \cdot 7290 = 4860.$$

Portanto, ainda podem ser colocados 4860 tijolos. \square

Exercício 7. Uma máquina A é capaz de fabricar 1200 peças de computador em três horas. Uma máquina B faz o mesmo trabalho em quatro horas. Se as duas trabalharem juntas, em quanto tempo as peças estarão prontas?



Solução. Em uma hora, a primeira máquina fabrica $\frac{1}{3}$ das peças, ao passo que a segunda fabrica $\frac{1}{4}$ das peças. Juntas, podem fazer $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ do trabalho em uma hora. Restará, então, $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ do serviço para a próxima hora, que não será totalmente utilizada (uma vez que $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$). Agora, como a razão entre $\frac{5}{12}$ e $\frac{7}{12}$ é

$$\frac{5}{12} \div \frac{7}{12} = \frac{5}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{12}}{7} = \frac{5}{7},$$

e $\frac{7}{12}$ do serviço é executado conjuntamente pelas máquinas em 1 hora, concluímos que $\frac{5}{12}$ do serviço será executado conjuntamente pelas máquinas em $\frac{5}{7}$ de uma hora, o que corresponde, aproximadamente, a

$$\frac{5}{7} \cdot 60 = \frac{300}{7} \cong 43$$

minutos. Portanto, trabalhando juntas as máquinas completarão o serviço em aproximadamente 1 hora e 43 minutos. \square

Exercício 8. *Trabalhando juntos, Alvo e Eva pintam uma casa em três dias; Eva e Ivo pintam a mesma casa em quatro dias e Alvo e Ivo pintam-na em seis dias. Se os três trabalharem juntos, em quanto tempo eles pintarão a mesma casa? Considere que, em todas as situações descritas, a jornada diária de trabalho seja de 6 horas.*

Antes de passarmos à solução *correta*, examinemos um argumento *incorreto* mas bastante frequente: escrevendo A para Alvo, E para Eva e I para Ivo, temos

$$\begin{cases} A + E = 3 \\ E + I = 4 \\ A + I = 6 \end{cases}$$

Somando ordenadamente as equações acima, chegamos a:

$$2(A + E + I) = 13 \Rightarrow A + E + I = 6,5.$$

Porém, observe que essa resposta não faz sentido, dentre outras razões porque não é razoável que as três pessoas, trabalhando juntas, levem mais tempo para finalizar o serviço do que apenas duas delas.

Solução. Para solucionar o problema corretamente, devemos considerar as *frações* do serviço que cada dupla consegue fazer em um dia. Utilizando as mesmas notações que acima, temos então:

$$\begin{cases} A + E = \frac{1}{3} \\ E + I = \frac{1}{4} \\ A + I = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos:

$$2(A + E + I) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},$$

de sorte que

$$A + E + I = \frac{3}{8}.$$

Portanto, em um dia, os três juntos realizarão $\frac{3}{8}$ do trabalho. Logo, em dois dias será realizado $\frac{6}{8}$ do trabalho, restando $\frac{2}{8}$ do serviço para o terceiro dia.

Agora, raciocinemos como no exercício anterior, observando que $\frac{2}{8}$ do trabalho representam $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{8}$ do trabalho (em outras palavras, a razão entre $\frac{2}{8}$ e $\frac{3}{8}$ é $\frac{2}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$). Assim, como os três juntos levam 6 horas para completar $\frac{3}{8}$ do serviço, para realizar os $\frac{2}{8}$ restantes serão necessárias $\frac{2}{3}$ das 6 horas, ou seja, $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ horas.

Portanto, com os três trabalhando juntos, o serviço será concluído em dois dias e quatro horas. \square

Vejamos, agora, um problema que não está *bem posto*.

Exercício 9. *Em uma escola, a razão entre as quantidades de meninos e meninas em uma sala do sexto ano é de 4 : 5, sendo de 5 : 4 para alunos de uma sala do sétimo ano. Caso a diretora resolva juntar essas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

Solução. Poderíamos pensar da seguinte forma: na primeira sala, para cada quatro meninos existem cinco meninas; por outro lado, na segunda sala, para cada quatro meninas existem cinco meninos. Logo, ao juntarmos as duas salas, a razão ficaria de 1 : 1, uma vez que para cada menino existiria uma menina.

Observe que, na “solução” acima, estamos assumindo *implicitamente* que ambas as salas têm um mesmo total de alunos. Se tal condição não for satisfeita, então não é possível calcular a razão entre meninos e meninas quando as duas salas forem juntas. Por exemplo se a sala do sexto ano tiver 18 alunos e a do sétimo ano tiver 36 alunos, então teremos 8 meninos e 10 meninas no sexto ano, mas 20 meninos e 16 meninas no sétimo ano (verifique tais afirmações); por sua vez, tais quantidades darão $8 + 20 = 28$ meninos e $10 + 16 = 26$ meninas ao juntarmos as duas salas, o que daria a razão $28 : 26 = 14 : 13$. É, agora, fácil perceber que, modificando-se as quantidades de alunos em ambas as salas, tal razão poderia facilmente mudar.

A seguir, propomos o exercício com enunciado correto.

Exercício 10. *Em uma escola, a razão entre as quantidades de meninos e meninas em uma sala do sexto ano é de 4 : 5, sendo de 5 : 4 para alunos de uma sala do sétimo ano. Sabendo que essas duas turmas possuem uma mesma quantidade de alunos, pergunta-se: caso a diretora resolva juntar estas duas turmas, qual será a nova razão entre os números de meninos e meninas?*

Solução. Veja a solução dada acima. \square

Exercício 11 (OBM 2010). *Ana começou a descer uma escada no mesmo instante em que Beatriz começou a subir. Ana tinha descido $\frac{3}{4}$ da escada quando cruzou com Beatriz. No momento em que Ana terminar de descer, que fração da escada Beatriz ainda terá que subir?*

Solução. Como as duas garotas encontram-se na terceira de quatro partes iguais da escada, podemos deduzir que Ana é três vezes mais rápida do que Beatriz. Portanto, quando Ana terminar de descer, ela terá percorrido a última quarta parte da escada, enquanto Beatriz terá percorrido um terço de um quarto da escada. Logo, Beatriz terá subido, ao todo,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Faltarão, pois, Beatriz subir $\frac{2}{3}$ da escada. \square

4 Sugestões ao professor

Parte da teoria e dos exercícios presentes neste material também foram abordados no módulo de frações do sexto ano. Acreditamos que a revisão deste conteúdo seja fundamental para que os alunos fixem bem o conteúdo – principalmente para aqueles com maior dificuldade.

Por outro lado, as partes teóricas que tratam sobre velocidade média, densidade e as soluções que envolvem equações de primeiro grau são novidades. A grande vantagem desses novos conteúdos é a possibilidade de relacionar razões a situações práticas. À título de ilustração, o professor pode elencar um conjunto de líquidos e pedir para que os alunos os ordenem de acordo com suas densidades, levando em consideração suas experiências cotidianas. Por exemplo, ele pode questionar a turma sobre qual líquido tem menor densidade à temperatura ambiente: a água ou o óleo; o óleo ou o álcool; e assim por diante (eventuais dúvidas podem ser dirimidas consultando-se livros ou a Internet). Uma vez que os líquidos estejam ordenados de acordo com suas densidades, o professor pode, então, pedir que os alunos comparem as massas de 2 metros cúbicos de cada um dos líquidos envolvidos, o que os fará resgatar o conceito de densidade como razão.

Recomendamos que o professor separe três encontros de 50 minutos cada para apresentar este material. No primeiro, elabore a introdução e resolva alguns exercícios simples. No segundo, aborde os temas sobre velocidade média e densidade. No terceiro, resolva mais exercícios para fixar bem o conteúdo. Caso queira separar um quarto encontro para apresentar mais aplicações sobre densidade e velocidade média, acreditamos que seja um excelente opção.