

# **Material Teórico - Círculo Trigonométrico**

## **A relação fundamental da Trigonometria**

### **Primeiro Ano do Ensino Médio**

**Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides**

**Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**17 de novembro de 2018**



# 1 A relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco de medida  $\alpha$  radianos a seguinte equação, que relaciona o seno e o cosseno de  $\alpha$ , é satisfeita:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (1)$$

Essa é a *relação fundamental da Trigonometria*.

**Observação 1.** Note que  $\text{sen}^2(\alpha)$  representa o quadrado do valor do seno de  $\alpha$ , número que também pode ser escrito como  $(\text{sen}(\alpha))^2$ , mas que é diferente do seno de  $\alpha^2$ , ou seja, de  $\text{sen}(\alpha^2)$ . Por exemplo,  $\text{sen}((\sqrt{\pi})^2) = \text{sen}(\pi) = 0$ , mas  $\text{sen}^2(\sqrt{\pi}) > 0$ , uma vez que  $0 < \sqrt{\pi} < \pi$ .

O caso particular dessa relação em que  $0 < \alpha < \pi/2$  já havia sido estudado na primeira aula do módulo “Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares” do Nono Ano. Na aula passada estendemos a noção de seno e cosseno para arcos de quaisquer medidas. Agora, mostraremos que a relação fundamental continua válida para todo arco  $\alpha$ .

Nas aulas 1 e 2 do módulo atual, vimos que se  $O = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $\alpha$  é um arco qualquer, então  $\text{cos}(\alpha)$  e  $\text{sen}(\alpha)$  são, nesta ordem (veja que o cosseno vem primeiro), a abscissa e a ordenada do ponto  $P$  sobre o círculo trigonométrico tal que  $\widehat{AP} = \alpha$  (com a convenção de que o arco  $\widehat{AP}$  é medido, a partir de  $A$ , no sentido anti-horário). Em outras palavras, sob tal convenção, temos

$$\widehat{AP} = \alpha \Rightarrow P = (\text{cos}(\alpha), \text{sen}(\alpha)).$$

Na aula passada vimos desenhos em que  $P$  pertence a cada um dos quadrantes e, em cada um deles, encontramos um triângulo retângulo cujos catetos medem  $|\text{sen}(\alpha)|$  e  $|\text{cos}(\alpha)|$  e cuja hipotenusa mede 1. (Veja que precisamos tomar os valores absolutos do seno e cosseno, pois, dependendo do quadrante ao qual o ponto  $P$  pertença, podemos ter  $\text{sen}(\alpha) < 0$  ou  $\text{cos}(\alpha) < 0$ ; contudo, os comprimentos dos lados do triângulo sempre são números positivos.)

**Exercício 2.** Antes de consultar as figuras da aula passada, para cada quadrante do círculo trigonométrico, escolha um ponto qualquer  $P = (x,y)$  e desenhe um triângulo retângulo cujos catetos possuem medidas  $|x|$  e  $|y|$  e cuja hipotenusa é  $OP$ , onde  $O = (0,0)$ . Seja  $\alpha = \widehat{AP}$ , onde  $A = (1,0)$ . Interprete quais segmentos possuem comprimentos  $|\text{cos}(\alpha)|$  e  $|\text{sen}(\alpha)|$  no seu desenho.

Aplicando o teorema de Pitágoras a tal triângulo retângulo, obtemos que, para qualquer  $\alpha$ , vale

$$|\text{sen}(\alpha)|^2 + |\text{cos}(\alpha)|^2 = 1^2.$$

Para concluir, basta observar que independentemente do seno e cosseno de  $\alpha$  serem positivos ou negativos, temos

que

$$|\text{sen}(\alpha)|^2 = \text{sen}^2(\alpha) \quad \text{e} \quad |\text{cos}(\alpha)|^2 = \text{cos}^2(\alpha),$$

o que, conjuntamente com a igualdade anterior, nos fornece a relação fundamental.

A relação fundamental nos diz que, se conhecermos o valor do cosseno de um arco, então o valor absoluto de seu seno está determinando; se, adicionalmente, soubermos o quadrante do arco, então poderemos encontrar também o sinal de seu seno. Da mesma forma, se conhecermos o seno e o quadrante de um arco, poderemos calcular seu cosseno. O exemplos a seguir exercita tais procedimentos.

**Exemplo 3.** Seja  $\beta$  um arco cujo comprimento é tal que  $\pi < \beta < 3\pi/2$ . Sabendo que  $\text{cos}(\beta) = 0,6$ , calcule  $\text{sen}(\beta)$ .

**Solução 1.** Substituindo  $\text{cos}(\beta) = 0,6$  na relação fundamental da Trigonometria (ou seja, fazendo  $\alpha = \beta$  na equação (1)), temos que:

$$\text{sen}^2(\beta) + (0,6)^2 = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\beta) &= 1 - (0,6)^2 \\ &= 1 - 0,36 \\ &= 0,64. \end{aligned}$$

Temos que  $\sqrt{0,64} = 0,8$ . A princípio, isso nos dá dois possíveis valores para  $\text{sen}(\beta)$ :

$$\text{sen}(\beta) = 0,8 \quad \text{ou} \quad \text{sen}(\beta) = -0,8.$$

Mas o enunciado nos diz que  $\pi < \beta < 3\pi/2$ , ou seja,  $\beta$  está no terceiro quadrante. Com isso, temos que  $\text{sen}(\beta) < 0$ , logo,  $\text{sen}(\beta) = -0,8$ .  $\square$

Uma decorrência útil de (1) é a seguinte: suponha que  $\alpha$  e  $\alpha'$  sejam arcos distintos, tais que  $\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\alpha')$ . Então, aplicando a relação fundamental duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} |\text{sen}(\alpha)| &= \sqrt{1 - \text{cos}^2(\alpha)} \\ &= \sqrt{1 - \text{cos}^2(\alpha')} \\ &= |\text{sen}(\alpha')|, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\alpha') \implies \text{sen}(\alpha) = \pm \text{sen}(\alpha'). \quad (2)$$

Portanto, se soubermos os sinais de  $\text{sen}(\alpha)$  e  $\text{sen}(\alpha')$  (por exemplo, se soubermos os quadrantes aos quais os arcos  $\alpha$  e  $\alpha'$  pertencem), descobriremos facilmente qual das duas igualdades acima ocorre.

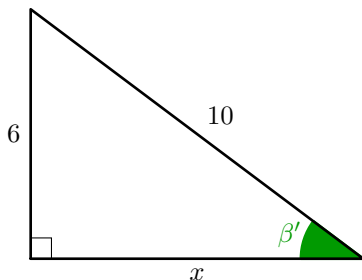
Evidentemente, também vale que

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha') \implies \text{cos}(\alpha) = \pm \text{cos}(\alpha'),$$

com observações análogas às feitas acima sobre a escolha entre os sinais  $+$  ou  $-$ .

De posse de tais comentários, temos a seguinte solução alternativa para o problema anterior.

**Solução 2.** Construíamos um triângulo retângulo que possui um ângulo de medida  $\beta'$  tal que  $0 < \beta' < \pi/2$  e  $\cos(\beta') = 0,6$ . (Isto é possível, uma vez que os valores  $\cos(\beta')$ , com  $\beta'$  variando no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , preenchem todo o intervalo  $(0,1)$ .) Como  $\cos(\beta') = 0,6 = \frac{6}{10}$ , uma maneira de construir tal triângulo é tomar um cateto de medida 6 e a hipotenusa de medida 10.



Seja  $x$  a medida do outro cateto do triângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$x^2 + 6^2 = 10^2 \implies x^2 = 100 - 36 = 64.$$

Como  $x > 0$ , segue que  $x = 8$ .

Ainda observando o triângulo, veja que

$$\text{sen}(\beta') = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Como  $\cos(\beta) = \cos(\beta')$ , aplicando (2) com  $\beta$  e  $\beta'$  no lugar de  $\alpha$  e  $\alpha'$ , obtemos

$$\text{sen}(\beta) = \pm 0,6.$$

Mas como  $\beta$  está no terceiro quadrante, seu seno é negativo. Logo,  $\text{sen}(\beta) = -0,6$ .  $\square$

**Observação 4.** Ao construir o triângulo acima, note que há várias possibilidades para os comprimentos dos catetos; por exemplo, poderíamos ter escolhido 0,6 e 1 no lugar de 6 e 10. A escolha que fizemos foi apenas para facilitar os cálculos, uma vez que 6 e 10 são números inteiros. Outra ótima escolha seria 3 e 5, o que resultaria no “famoso” triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

Um outro tipo de problema-padrão envolvendo a relação fundamental é o descrito pelo exemplo a seguir.

**Exemplo 5.** Calcule  $\text{sen}(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$ , sabendo que  $\alpha$  pertence ao segundo quadrante e

$$\left| \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right| = \frac{7}{24}.$$

**Solução.** Como  $\alpha$  pertence ao segundo quadrante, temos  $\text{sen}(\alpha) > 0$  e  $\cos(\alpha) < 0$ . Portanto,  $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} < 0$ , de sorte que

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{7}{24}.$$

Então,  $\text{sen}(\alpha) = -\frac{7}{24} \cos(\alpha)$  e, Substituindo essa igualdade em (1), obtemos

$$\left( -\frac{7}{24} \cos(\alpha) \right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Isso é o mesmo que  $\left( \frac{7^2+24^2}{24^2} \right) \cos^2(\alpha) = 1$  ou, ainda,

$$\cos^2(\alpha) = \left( \frac{24}{25} \right)^2.$$

Como  $\cos(\alpha) < 0$ , temos  $\cos(\alpha) = -\frac{24}{25}$  e, daí,

$$\text{sen}(\alpha) = -\frac{7}{24} \cos(\alpha) = -\frac{7}{24} \left( -\frac{24}{25} \right) = \frac{7}{25}.$$

$\square$

Os últimos dois exemplos são mais elaborados.

**Exemplo 6.** Qual o valor máximo que  $\cos(x) \cdot \text{sen}(x)$  pode assumir quando  $x$  varia sobre todos os números reais.

**Solução.** Ao elevar qualquer número real ao quadrado, obtemos um número não negativo. Assim, para qualquer valor real de  $x$ , vale que

$$(\text{sen}(x) - \cos(x))^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação acima, obtemos

$$\text{sen}^2(x) - 2 \text{sen}(x) \cos(x) + \cos^2(x) \geq 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) \geq 2 \text{sen}(x) \cos(x).$$

Agora, a relação fundamental fornece a igualdade  $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , o que reduz a última desigualdade a

$$\text{sen}(x) \cos(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Para que  $\frac{1}{2}$  seja o valor máximo de  $\text{sen}(x) \cos(x)$ , resta checar que ele é atingido, isto é, que existe um valor real de  $x$  tal que  $\text{sen}(x) \cos(x)$  valha, de fato,  $\frac{1}{2}$ . Para tanto, observe que teremos  $\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$  exatamente quando tivermos

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 2 \text{sen}(x) \cos(x),$$

isto é, exatamente quando ocorrer a igualdade

$$(\text{sen}(x) - \cos(x))^2 = 0.$$

Então, para que  $\text{sen}(x) \cos(x) = \frac{1}{2}$ , devemos ter  $\text{sen}(x) = \cos(x)$ . Testando  $x = \frac{\pi}{4}$  radianos, temos que  $\text{sen}(x) = \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , o que nos dá a igualdade desejada.

Dessa forma, o valor máximo de  $\text{sen}(x) \cos(x)$  é  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

Vale observar que, quando progredirmos um pouco mais em nossa aprendizagem de Trigonometria, poderemos dar uma solução muito mais simples para o exemplo anterior. Realmente, veremos que para todo real  $x$  vale a igualdade

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Dessa forma, e lembrando que todo seno vale no máximo 1, obtemos imediatamente

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2}.$$

Para haver igualdade, devemos ter  $\sin(2x) = 1$ , e uma possibilidade é que seja  $2x = \frac{\pi}{2}$ , o que fornece  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Uma modificação esperta da primeira solução do exemplo anterior resolve o próximo.

**Exemplo 7.** Encontre o valor máximo da expressão

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x)$$

quando  $x$  varia nos reais.

**Solução.** Primeiramente, observe que  $9^2 + 12^2 = 15^2$ . Então, escrevemos

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x) = 15 \left( \frac{9}{15} \sin(x) + \frac{12}{15} \cos(x) \right).$$

Veja agora que, para todo  $x$  real, temos

$$\left( \frac{9}{15} - \sin(x) \right)^2 + \left( \frac{12}{15} - \cos(x) \right)^2 \geq 0.$$

Expandindo os quadrados do primeiro membro, obtemos

$$\frac{9^2 + 12^2}{15^2} + \sin^2(x) + \cos^2(x) - \frac{2}{15}(9 \sin(x) + 12 \cos(x)) \geq 0.$$

Usando a relação fundamental, ficamos com

$$\frac{2}{15}(9 \sin(x) + 12 \cos(x)) \leq 2$$

ou, ainda,

$$9 \sin(x) + 12 \cos(x) \leq 15.$$

Como no exemplo anterior, para ver que o valor máximo é 15, temos de mostrar que a igualdade ocorre para algum valor real de  $x$ . Também como antes, para a igualdade devemos ter

$$\left( \frac{9}{15} - \sin(x) \right)^2 + \left( \frac{12}{15} - \cos(x) \right)^2 = 0,$$

de sorte que

$$\sin(x) = \frac{9}{15} \text{ e } \cos(x) = \frac{12}{15}.$$

Ora, uma vez que

$$\left( \frac{9}{15} \right)^2 + \left( \frac{12}{15} \right)^2 = 1,$$

o ponto  $\left( \frac{12}{15}, \frac{9}{15} \right)$  pertence ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico, de forma que realmente existe um valor de  $x$  tal que  $\sin(x) = \frac{9}{15}$  e  $\cos(x) = \frac{12}{15}$ .  $\square$

## 2 Sobre os propósitos da Trigonometria

É instrutivo terminar este material tecendo uma observação genérica sobre os propósitos da Trigonometria.

Historicamente, a ideia por trás da criação da Trigonometria foi a de obter ferramentas que tornassem mais simples a análise de problemas de Geometria. Isso pode parecer contraditório quando olhamos para a segunda solução do Exemplo 3, na qual fizemos exatamente o contrário: utilizamos argumentos geométricos para resolver um problema trigonométrico. Contudo, a razão é simplesmente que, até o momento, desenvolvemos muito pouca Trigonometria. À medida que avançarmos mais, ficará claro o quão poderosa a Trigonometria é, como auxiliar à Geometria.

Posteriormente, com advento da Física Newtoniana e do conceito de função, ficou evidente que as funções trigonométricas  $\sin$  e  $\cos$  eram as ferramentas adequadas para descrever uma série de fenômenos físicos, como por exemplo o movimento harmônico simples (MHS), no qual uma massa presa a uma mola presa a uma parede oscila na direção do eixo definido pela mola, apoiada sobre uma superfície suficientemente grande e sujeita a um atrito cinético desprezível (veja a figura abaixo). De fato, pode ser

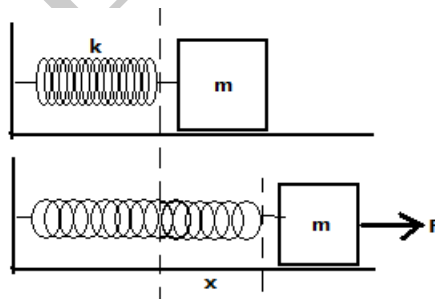


Figura 1: o movimento harmônico simples.

mostrado (veja a referência [1] por exemplo)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad (3)$$

em que  $x(t)$  é a *elongação* da mola no instante  $t$ , medida em relação a partir do repouso como mostrado na figura, e  $x_0$ ,  $v_0$  e  $\omega$  são parâmetros ligados às condições iniciais de movimento e à natureza da mola.

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  e argumentando como no Exemplo 7, veremos posteriormente que  $\sqrt{a^2 + b^2}$  é o maior valor possível para  $a \sin(u) + b \cos(u)$ , à medida que  $u$  varia em  $\mathbb{R}$ , de forma que

$$|a \sin(u) + b \cos(u)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aplicando este fato a (3), com  $a = \frac{v_0}{\omega}$ ,  $b = x_0$  e  $u = \omega t$ , obtemos

$$|x(t)| \leq \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},$$

o que já ilustra bem a importância da Trigonometria (e da relação fundamental) como ferramenta matemática para a Física. A constante  $\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  é conhecida como a *amplitude* do MHS.

### Dicas para o Professor

O objetivo aqui é continuar trabalhando com as funções seno e cosseno, pensando no parâmetro dessas funções como um número real qualquer. Vimos que a célebre relação fundamental da trigonometria continua valendo e que, sabendo o quadrante do arco, o seno de um ângulo determina seu cosseno e vice-versa; da mesma forma, a razão entre o seno e o cosseno determina cada um deles.

Recomendamos que esse material sejam apresentado em dois encontros de 50 minutos, reservando o segundo encontro para a discussão dos dois últimos exemplos da primeira seção, bem como para a discussão da segunda seção.

A referência [2] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [3] traz um curso completo de Trigonometria.

A lista de exercícios, anexa a essa aula, traz vários exercícios resolvidos, incluindo várias maneiras de utilizar a relação fundamental para simplificar fórmulas trigonométricas. Assim, eles aprofundam o material dessa aula. Sugerimos que o leitor tente resolvê-los e verifique as soluções e em um segundo momento.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. SBM, Coleção Profmat, Rio de Janeiro, 2014.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.