Material Teórico - Tópicos Adicionais - Introdução à Teoria dos Grafos

Introdução à Teoria dos Grafos - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

21 de setembro de 2019

Portal da Matemática
OBMEP

1 Definições básicas

Este material dá continuidade ao anterior introduzindo novos conceitos relacionados a Grafos. No material passado, vimos que um grafo é formado por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas. Por brevidade, muitas vezes escrevemos $G = (V,E)$ para indicar que V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas do grafo G. De outra forma, quando G é um grafo qualquer, vamos denotar por $V(G)$ seu conjunto de vértices e por $E(G)$ seu conjunto de arestas. Aqui, vamos estudar apenas grafos simples (ou seja, sem laços nem arestas múltiplas), de modo que $E(G)$ é um conjunto de pares não ordenados de $V(G)$.

Dizemos que um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G, e escrevemos $H \subseteq G$, quando, além de H ser um grafo, tivermos $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Além disso, dizemos que o subgrafo H é *induzido* por um conjunto de vértices S de G, e escrevemos $H = G[S]$, quando $V(H) = S$ e todas as arestas de G que possuem ambas as extremidades em S também estiverem presentes em H. Em resumo, para formar um subgrafo induzido de G basta escolher qualquer subconjunto de vértices de G e manter exatamente todas as arestas de G que têm ambas as extremidades nesse subconjunto.

Um **grafo caminho** de comprimento n, denotado por P_n, é um grafo com $n+1$ vértices (distintos), ordenados em uma sequência $V(P_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, tal que suas arestas ligam vértices consecutivos dessa sequência, isto é, $E(P_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n\}$.

Observação 1. *Em vários livros P_n denota o grafo caminho com n vértices, ou seja, de comprimento $n-1$.*

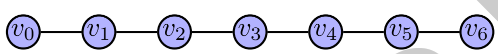


Figura 1: P_6, um caminho de comprimento 6.

Dado um grafo $G = (V,E)$ e dois vértices $u, v \in V$, um **caminho** em G que vai de u a v é uma sequência de vértices distintos de G, começando em u e terminando em v, ou seja $u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v$, tal que v_0v_1, v_1v_2, ..., $v_{n-1}v_n$ são arestas de G. Veja que, neste caso, podem existir outras arestas, além das arestas do caminho, entre os vértices do conjunto $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$. Entretanto, permanece a condição de que um caminho não pode "passar" duas vezes por um mesmo vértice.

Observação 2. *Se abrirmos mão da condição de que os vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$ sejam distintos, temos o que é usualmente chamado de **passeio** em um grafo. Em um passeio é permitido, inclusive, passar várias vezes sobre uma mesma aresta. Por outro lado, se permitirmos repetir vértices mas* não *permitirmos passar mais de uma vez sobre uma mesma aresta, teremos uma **trilha**. É possível provar que qualquer passeio de comprimento mínimo entre dois vértices u e v é obrigatoriamente um caminho entre u e v. Assim, sempre que existir um passeio entre dois vértices, também existirá um caminho entre eles. Por conta disso, neste material concentraremos nossa atenção apenas em caminhos. A nomenclatura passeio/trilha/caminho se faz necessária apenas no estudo de alguns tópicos específicos de Teoria dos Grafos, como o estudo de Trilhas Eulerianas e de Caminhos Hamiltonianos, que não serão vistos agora.*

2 Grafos conexos

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** quando, para quaisquer dois vértices u e v de G existir um caminho, em G, de u até v. Isso quer dizer que podemos nos locomover de qualquer vértice de G para qualquer outro, passando apenas por arestas.

Exemplo 3. *Seja G um grafo com 15 vértices tal que cada vértice possui grau pelo menos 7 (ou seja, possui 7 outros vértices adjacentes a ele). Mostre que G é conexo.*

Solução. Sejam u e v dois vértices distintos quaisquer do grafo. Precisamos mostrar que existe um caminho ligando u a v. Na verdade, vamos provar algo ainda mais forte: que existe um caminho de comprimento no máximo 2 de u a v. Para isto, tratamos dois casos:

Caso 1: u e v são adjacentes, ou seja, uv é uma aresta do grafo G. Neste caso não há o que fazer, pois podemos ir de u para v em um único passo, ou seja, temos um caminho de comprimento 1 ligando esses dois vértices.

Caso 2: u e v não são adjacentes. Além de u e v, existem outros 13 vértices em G. Como o grau de u é 7 e uv não é uma aresta, temos que 7 dentre esses 13 vértices são adjacentes a u (ou seja, vizinhos de u). Seja R o conjunto dos 6 vértices restantes (que não são vizinhos de u). Como o grau de v também é 7, temos que v também precisa ter 7 vizinhos, logo, v possui pelo menos um vizinho que não está em R. Portanto, existe um vértice z que é vizinho tanto de u como de v. Com isso, uzv é um caminho de comprimento 2 e que vai de u a v.

Como um dos casos acima sempre acontece e u e v são vértices quaisquer, concluímos que sempre existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G. Logo, G é conexo. $\square$

O exemplo seguinte generaliza o anterior.

Exemplo 4. *Se todos os vértices de um grafo com n vértices têm grau maior ou igual a $(n-1)/2$, então esse grafo é conexo.*

Solução. Da mesma forma que na resolução do exemplo anterior, sejam u e v vértices quaisquer do grafo. Se u e v forem vizinhos, não há nenhum trabalho a fazer, pois existe um caminho de u até v de comprimento 1. Suponha, então, que estamos no caso em que u e v não são vizinhos.

O grafos possui, além de u e v, apenas $n-2$ outros vértices. Como u possui $(n-1)/2$ e v também, a soma do grau de u com o grau de v é pelo menos $n-1$. Se eles não possuíssem um vizinho em comum, esses $n-1$ vértices teriam que ser distintos, o que é impossível, pois há apenas $n-2$ outros vértices. Logo, existe um vértice z que é vizinho quanto de u como de v e, portanto, uzv é um caminho de comprimento 2. $\square$

Em um grafo qualquer G, um subgrafo que seja conexo e maximal é chamado de **componente conexa** de G. Quando G é conexo, temos que o próprio G é sua única componente conexa. Quando G é **desconexo** (isto é, não é conexo), temos um conjunto de componentes conexas, que são disjuntas duas a duas e cuja união é o grafo G. Para qualquer vértice $x \in V(G)$, existe uma única componente conexa à qual x pertence; intuitivamente, tal componente é induzida pelo conjunto de vértices que podemos alcançar a partir de x. Vamos denotar tal componente por C_x.

Visualmente, é simples identificar as componentes conexas de um grafo: basta agrupar os vértices nos conjuntos maiores possíveis de modo que os subgrafos induzidos por cada um desses conjuntos sejam conexos. Por exemplo, considere o grafo $G = (V,E)$, em que $V = p_1, p_2, \ldots, p_7$ e $E = \{p_1p_2, p_1p_3, p_4p_5, p_4p_6, p_5p_6, p_6p_7\}$ (veja a figura a seguir). Imagine que cada vértice p_i representa uma pessoa, e a existência de uma aresta entre um par de pessoas indica que elas se conhecem.

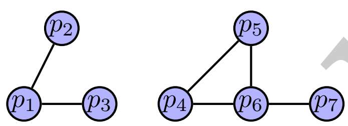


Figura 2: um grafo desconexo.

O fato de que interpretamos o grafo da Figura 2 como um único grafo é algo que depende apenas do contexto. Neste exemplo, estamos tratando de uma informação sobre um único conjunto de pessoas ($\{p_1, \ldots, p_7\}$), logo, temos um único grafo. Este grafo possui duas componentes conexas, uma induzida pelos vértices $\{p_1, p_2, p_3\}$ e outra pelos vértices $\{p_4, p_5, p_6, p_7\}$, mas continua sendo apenas um grafo. Em outros contextos, poderíamos "quebrar" esse grafo em dois grafos separados, olhando para os subgrafos induzidos por cada componente.

Ainda assim, o Exemplo 5 mostra que devemos tomar certo cuidado ao tentar encontrar as componentes de um grafo olhando apenas para a figura que o representa.

Exemplo 5. *O grafo da Figura 3(a) parece ser um grafo conexo, mas não é. Observe que o ponto no centro dela não é um vértice (pois o simples fato de duas arestas se cruzarem não quer dizer que ali existe um vértice). Assim, o conjunto de vértices de tal grafo é tão somente* $V = \{v_1, \ldots, v_8\}$ *e o conjunto de arestas é* $E = \{v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8\}$. *Veja que não é possível, por exemplo, formar um caminho que vá de* v_1 *até* v_2. *A Figura 3(b) mostra outra forma de desenhar o mesmo grafo e, nela, percebe-se que ele é claramente desconexo, possuindo 4 componentes conexas.*

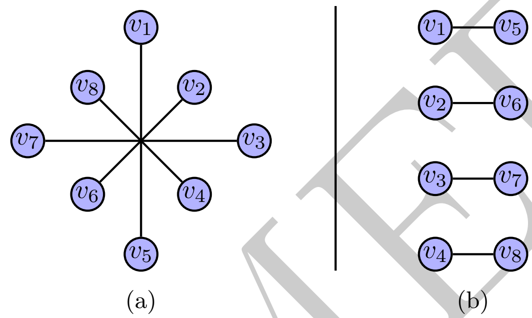


Figura 3: (a) um grafo que aparenta ser conexo, mas não é. (b) uma outra maneira de desenhar o grafo (a).

Proposição 6. *Suponha que G é um grafo conexo e xy é uma aresta de G. Mostre que o grafo H, obtido removendo-se apenas a aresta xy de G (sem remover os vértices x e y), possui no máximo duas componentes conexas.*

Prova. Sejam G, x, y e H como no enunciado. No grafo H, seja C_x a componente conexa à qual pertence o vértice x e C_y a componente à qual pertence y. (Veja que pode acontecer de C_x ser igual a C_y, mas isso não é um problema).

Vamos provar que qualquer vértice v diferente de x e y deve pertencer a C_x ou C_y, de modo que isso implica que não pode existir uma terceira componente conexa.

Como G é um grafo conexo, nele existe um caminho que vai de v até x. Esse caminho, pode usar ou não a aresta xy. Se tal caminho não usar a aresta xy (nem na direção de x para y nem na direção de y para x), então o mesmo caminho também existe no grafo H. Neste caso, os vértices x e v estão em uma mesma componente de H, ou seja, $v \in C_x$. No outro caso, o tal caminho vai de v até x, em G, passando pela aresta xy (na verdade, o caminho percorre o sentido de y para x dessa aresta, mas isso não é muito relevante). Para isso, antes de passar pela aresta xy, o caminho em questão começa em x e chega até o vértice y. Esse (sub)caminho é também um caminho em H (pois não usa a aresta xy), o que mostra que v pertence à mesma componente de y em H, ou seja, $v \in C_y$. Em ambos os casos, temos que $v \in C_x \cup C_y$, como queríamos demonstrar.

Observação: no segundo caso acima, além do caminho que vai de v a x passando pela aresta xy, poderia existir um outro caminho, também de v a x que não usa a aresta xy. Neste caso, v estaria tanto em C_x como em C_y o que garantiria que $C_x = C_y$. Uma vez que isto ocorresse, concluiríamos que H é conexo. Mas isso não é necessário para a prova da Proposição 6. $\square$

Exemplo 7. *Certo país possui (uma quantidade desconhecida de) cidades e existem algumas estradas, todas de mão dupla, que conectam diretamente alguns pares dessas cidades. Sabe-se que é possível se locomover de qualquer cidade para qualquer outra (passando possivelmente por cidades intermediárias, ou seja, usando mais do que uma estrada). Sabe-se ainda que de cada cidade partem exatamente* 100 *estradas. Um dia, uma das estradas é fechada para manutenção. Mostre que ainda assim é possível se locomover de qualquer cidade a qualquer outra.*

Solução. Seja G o grafo que tem por vértices as cidades e por arestas as estradas. Sabemos que G é conexo e que todo vértice possui grau exatamente 100. Seja xy a aresta que corresponde à estrada interditada. Queremos provar que o grafo $H = G - xy$ (obtido removendo-se a aresta xy) ainda é conexo.

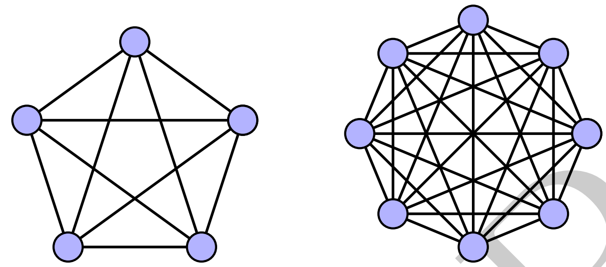
Suponha, por contradição, que H seja desconexo. Pela Proposição 6, como H não é conexo, ele deve ter exatamente 2 componentes conexas. Sejam (em H) C_x a componente do vértice x e C_y a do vértice y.

Observa, agora, o grafo induzido pelos vértices de C_x. Ora, como não há nenhuma aresta de C_x para C_y e removemos apenas a aresta xy de G, temos que o vértice x tem grau exatamente 99 e todos os demais vértices de C_x possuem grau 100. Isso implica que a soma dos graus dos vértices em C_x é um número ímpar (de fato, é uma soma de vários números iguais a 100, que resulta em um número par, com o 99, que é ímpar, resultado num total ímpar). Mas isso é impossível, pois na primeira parte desta aula vimos que a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre par (pois é igual a duas vezes o número de arestas). $\square$

3 Grafos especiais

Nesta seção, vamos aprender os nomes de alguns grafos que são usados com frequência.

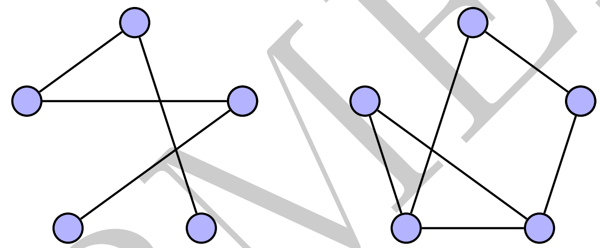
Um **grafo completo** com n vértices é aquele onde todo par de vértices distintos forma uma aresta. Assim, a quantidade de arestas em um grafo completo com n vértices é a quantidade total de pares de vértices, que sabemos ser igual a $\binom{n}{2}$. Em símbolos, ele é representando por K_n. A Figura 4 mostra um K_5 e um K_8.



(a) um K_5. (b) um K_8.

Figura 4: exemplos de grafos completos.

Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos também o **grafo complementar** de G, denotado por $\overline{G}$, como o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes se, e só se, eles *não* forem adjacentes em G. Informalmente, tudo que é aresta em G deixa de ser aresta em $\overline{G}$ e tudo que não é aresta em G passa a ser aresta em $\overline{G}$. Com isso o número de arestas de G somado ao número de arestas de $\overline{G}$ é igual ao número de arestas no grafo completo com $|V(G)|$ vértices. A Figura 5 mostra um par de grafos complementares.



(a) um grafo G (b) e seu complemento, $\overline{G}$.

Figura 5: exemplos de grafos complementares.

Exemplo 8. *Mostre que para qualquer grafo G, temos que G ou $\overline{G}$ é conexo. (Observe que pode acontece de ambos G e $\overline{G}$ serem conexos.)*

Solução. Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Se G for conexo, não há o que demonstrar. Suponha, então, que G não é conexo. Queremos demonstrar que $\overline{G}$ é conexo.

Como G não é conexo, temos que G possui pelo menos duas componentes conexas. Sejam u e v dois elementos quaisquer de V (eles são vértices tanto em G como em $\overline{G}$). Tratemos dois casos.

Caso 1: u e v pertencem a componente distintas de G, ou seja, $u \in C_u$ e $v \in C_v$ com $C_u \neq C_v$. Como não há nenhuma aresta de C_u para C_v em G, temos que em $\overline{G}$ todo vértice de C_u é adjacente a todo vértce de C_v. Em particular, uv é uma aresta de $\overline{G}$. Logo, existe um caminho de comprimento 1 entre eles, em $\overline{G}$.

Caso 2: u e v pertencem a uma mesma componente conexa de G, ou seja, $C_u = C_v$. Como G possui pelo menos duas componente, existe (pelo menos) um vértice z que pertence a uma componente C_z diferente de C_u. De modo semelhante ao caso anterior, como não há nenhuma aresta de C_u a C_z em G, temos que, em $\overline{G}$, todo vértice de C_u é adjacente a todo vértice de C_z. Como u e v estão em C_u, temos que uz e vz são arestas de $\overline{G}$. Logo, uzv é um caminho de comprimento 2 em $\overline{G}$.

Concluímos, então, que $\overline{G}$ é conexo. $\square$

Um **grafo vazio** é aquele em que o conjunto de arestas é vazio. Veja que todo grafo vazio é o complementar de um grafo completo. Por isso, o grafo vazio com n vértices é denotado por $\overline{K}_n$.

Um **grafo regular** é qualquer grafo em que todos os vértices possuem um mesmo grau. De forma mais explícita, se r é um número inteiro positivo, um grafo é chamado de ***r*-regular** quando todos os seus vértices possuem grau exatamente r. Por exemplo, veja que K_n é $(n-1)$-regular. Outro exemplo é o "grafo envelope", da Figura 6, que é 3-regular.

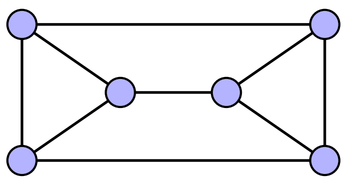


Figura 6: exemplo de grafo 3-regular.

O **grafo ciclo** com n vértices é chamado de C_n. Ele é obtido a partir de um caminho com n vértices (ou seja, de comprimento $n-1$), acrescentando-se a aresta entre o ponto inicial e final do caminho. Observe que todo ciclo é conexo e 2-regular. O exemplo seguinte mostra que a recíproca disso também vale.

Exemplo 9. *Mostre que todo grafo (simples) conexo e 2-regular é um ciclo.*

Ideia. Considere uma aresta qualquer do grafo, digamos v_0v_1. Como o vértice v_1 tem grau 2, ele possui exatamente um outro vizinho, digamos v_2. Por sua vez, como v_2 tem que ter dois vizinhos, ele precisa de um vizinho diferente de v_1. Se v_2 for vizinho de v_0, temos um ciclo com 3 vértices (C_3) e não pode haver outros vértices (pois o grafo é conexo e todo vértice tem grau exatamente 2). Caso contrário, v_2 é vizinho de um novo vértice v_3. Por sua vez, v_3 precisa de um novo vizinho, que não pode ser v_1 nem v_2, pois estes já possuem dois vizinhos. Como antes, se v_3 é vizinho de v_0, temos um ciclo com 4 vértices; caso contrário v_3 é vizinho de um novo vértice v_4. Prosseguindo dessa forma, como o grafo é finito, em algum momento teremos um vértice v_n, que não pode ser vizinho de v_1, v_2, ..., v_{n-1} e, portanto, precisa ser vizinho de v_0. Temos, assim, um ciclo C_{n+1}. Por fim, como o grafo é conexo, se houvesse um vértice do grafo que não estivesse em C_{n+1}, deveria haver uma aresta saindo de C_{n+1}. Mas isto é impossível, pois todos os vértices já possuem grau 2 em C_{n+1}. Pelo mesmo motivo, também não podemos acrescentar outras arestas. □

Prova. Uma maneira de formalizar a prova acima é a seguinte. Como o grafo é finito, podemos tomar o *maior* caminho contido neste grafo. Digamos que este caminho tenha comprimento n e seja $P = v_0v_1 \dots v_n$. Claramente $n \geq 2$ (pois todo vértice tem dois vizinhos). Se existir um vértice z adjacente a v_n e que não pertença a P, então $v_0v_1 \dots v_nz$ seria um caminho de comprimento $n+1$, contradizendo o fato de P ser máximo. Isso não pode acontecer, logo, v_n tem um outro vizinho em P (diferente de v_{n-1}).

Mas veja que $v_1, \dots, v_{n-1}$ já possuem grau 2 em P, logo, não podemos acrescentar outra aresta de v_n a um deles. Assim, a única opção é v_n ser vizinho de v_1, e obtemos um C_{n+1}. Pelo mesmo motivo apresentado na ideia da demonstração, não pode haver outros vértices nem arestas no grafo além dos que já estão em C_{n+1}. □

Um grafo G é **bipartido** quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas partes, digamos $V(G) = A \cup B$, onde A e B são disjuntos, de forma que toda aresta de G possui uma das extremidades em A e a outra em B.

Veja que, em um grafo bipartido, não é necessário que todo vértice de A seja adjacente a todo vértice de B. Por outro lado, um grafo bipartido que satisfaça essa última condição é chamado de **bipartido completo**. Ainda nesse caso, se $|A| = n$ e $|B| = m$, tal grafo é denotado por $K_{n,m}$. A figura a seguir mostra o grafo bipartido completo $K_{3,4}$.

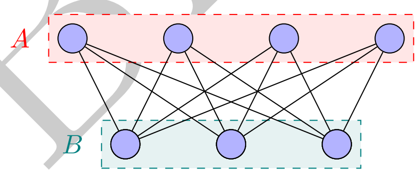


Figura 7: um $K_{3,4}$

Problema 10. *Mostre que todo grafo (simples) 3-regular e com exatamente 6 vértices é isomorfo a $K_{3,3}$ ou ao grafo da Figura 6.*

O resultado a seguir fornece uma caracterização dos grafos bipartidos.

Proposição 11. *Um grafo é bipartido se somente se não contem ciclos com uma quantidade ímpar de vértices.*

Prova (esboço). Suponha que G seja um grafo bipartido, com partição de vértices $V(G) = A \cup B$. Veja que qualquer ciclo que "começa" em um vértice de A deve terminar no mesmo vértice, portanto também em A, logo, deve usar uma quantidade par de arestas (já que, ao usar cada aresta, nos movemos de A para B, ou vice-versa). Da mesma forma, todo ciclo que começa em B tem comprimento par. Logo, G não possui ciclos ímpares.

Resta provar que a recíproca também vale, ou seja, se o grafo G não possui nenhum ciclo ímpar, então ele é bipartido. Para isso, escolha um vértice v qualquer e pinte-o de azul. Pinte cada um dos vizinhos de v de vermelho. Pinte os vizinhos dos vizinhos de v de azul e assim sucessivamente, sempre alternando as cores, até pintar todos os vértices da componente conexa de v. Feito isso, escolha um vértice qualquer ainda não colorido e continue o processo.

Repita até pintar todos os vértices. É possível mostrar que se existisse qualquer aresta entre dois vértices de mesma cor, então poderíamos construir um ciclo ímpar. Mas, por hipótese, um tal ciclo não existe. Logo, podemos definir A como o conjunto dos vértices azuis e B como o conjunto dos vértices vermelhos, obtendo a partição desejada de $V(G)$. □

4 Árvores

Uma **árvore** (veja a Figura 8) é um grafo conexo e sem ciclos (ou seja, que não possui nenhum ciclo como subgrafo). Um vértice (de uma árvore) que tenha grau 1 é chamado de **folha**. Veja que um grafo formado por apenas um vértice também é considerado uma árvore.

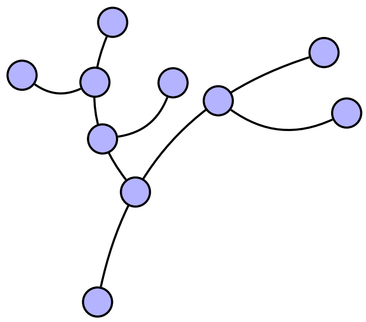


Figura 8: uma árvore.

Árvores são grafos muito simples mas bastante importantes, pois aparecem com muita frequência no nosso dia a dia. Por exemplo, em problemas de contagem podemos organizar os casos analisados usando uma *árvore de decisão* (veja a Figura 9). Estuda-se também árvores de busca, árvores genealógicas, etc, onde impõe-se algumas propriedades adicionais para cada tipo de árvore.

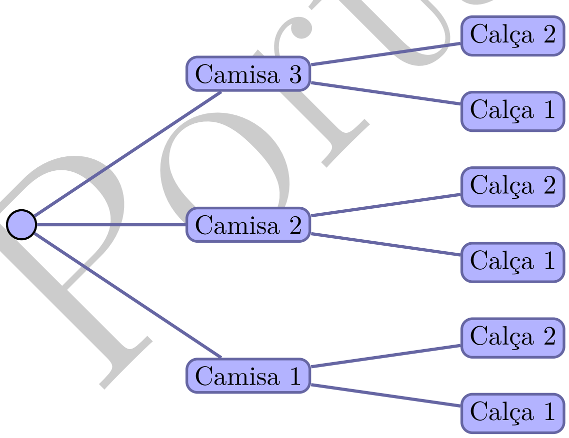


Figura 9: uma árvore de decisão na qual se considera duas perguntas: (i) "qual camisa vestir" e (ii) "qual calça vestir" (após escolher a camisa).

Uma **floresta** é um grafo em que todas as suas componentes conexas são árvores. De forma equivalente, uma floresta é qualquer grafo sem ciclos.

Os dois resultados a seguir explicam um pouco da estrutura das árvores (e, portanto, das florestas).

Proposição 12. *Toda árvore com pelo menos uma aresta possui uma folha.*

Solução. Basta adaptar a prova do Exemplo 9. Seja G uma árvore, ou seja, um grafo conexo e sem ciclos. Seja $P = v_0v_1 \dots v_n$ um caminho de comprimento máximo em G. Dessa vez, ao contrário da prova do Exemplo 9, os vértices $v_1, \dots, v_{n-1}$ não precisam ter grau exatamente 2 (eles podem ter grau maior que 2). Contudo, se v_n possui qualquer vizinho em P diferente de v_{n-1}, por exemplo se v_n é vizinho de v_i, com $0 \le i \le n-2$, então G contém um ciclo (no caso, $v_iv_{i+1} \dots v_n$). Isso é impossível (uma vez que G não pode ter ciclos), logo, o único vizinho de v_n em P é v_{n-1}. Por outro lado, se v_n tivesse um vizinho em G mas fora de P, digamos z, então o caminho $v_0v_1 \dots v_nz$ seria maior do que P, o que também é impossível. Logo v_{n-1} é o único vizinho de v_n em todo o grafo G, ou seja, v_n é uma folha.

Observação: também poderíamos ter adaptado a ideia informal da primeira demonstração do Exemplo 9, qual seja, percorrer os vértices de G até chegar a uma folha. Esta solução é apresentada na vídeo-aula deste módulo. □

Proposição 13. *Toda árvore com n vértices possui exatamente $n-1$ arestas.*

Solução. Seja T uma árvore com n vértices. Pela Proposição 12, T possui uma folha, digamos v. Apague de T o vértice v e a única aresta incidente a v. Então, o grafo resultante, $T - v$, ainda é uma árvore. De fato, ele continua sem ciclos (pois não há como *criar* um ciclo apenas apagando vértices e arestas) e continua conexo, pois, como v é folha, ele não pode ser o vértice intermediário em nenhum caminho entre dois outros vértices, logo, sua remoção não destrói caminhos entre os vértices de $T - v$.

Com isso, a árvore $T - v$ possui um vértice a menos e uma aresta a menos que T. Prossiga aplicando novamente a Proposição 12 para remover outros vértice e aresta de $T - v$, e assim sucessivamente até que sobre apenas um vértice (e nenhuma aresta). Como a quantidade de arestas removidas é igual à quantidade de vértices removidos e ainda sobrou um vértice, temos que no grafo inicial T a quantidade de arestas é uma unidade a menos que a quantidade de vértices. □

Exemplo 14. *Temos uma rede de vôlei quadriculada 50×20, formada por quadrados unitários em que cada lado é um barbante. Com o passar do tempo, alguns dos barbantes que conectam os vértices dos quadradinhos podem* *se romper. Entretanto, é preciso que vários barbantes arrebentem para que a rede se desfaça em dois ou mais pedaços. Qual é o número máximo de barbantes que podemos cortar de modo que a rede continue tendo um só pedaço após os cortes? Observação: não é permitido fazer cortes nos vértices dos quadrados.*

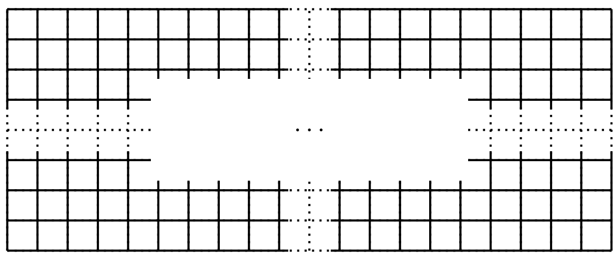


Figura 10: uma rede de vôlei.

Solução. Montemos um grafo em que os vértices dos quadradinhos da rede de vôlei são os vértices do grafo e os lados desses quadradinhos são as arestas. Esse grafo (que é chamado de *grade* ou *grid*) possui $51 \cdot 21$ vértices e $51 \cdot 20 + 21 \cdot 50$ arestas (veja isso contando as arestas "verticais" e as "horizontais" separadamente).

Cortar um barbante é o mesmo que remover uma aresta desse grafo. Nosso objetivo é apagar o máximo possível de arestas, de forma que o resultado ainda seja um grafo conexo. Veja que, enquanto o grafo possuir algum ciclo, podemos apagar uma aresta do ciclo sem que o grafo resultante deixe de ser conexo. De fato, qualquer caminho que use uma areta de um ciclo pode ser modificado em um passeio que não usa tal aresta, passando pelo "outro lado" do ciclo (e desse passeio podemos obter um caminho). Continue removendo arestas, não importa qual delas exatamente, contanto que seja uma aresta de um ciclo do grafo obtido, até que, em algum momento, o grafo resultante não tenha nenhum ciclo.

Por construção, o grafo resultante é sem ciclos e permanece conexo, logo, é uma árvore (ainda com $51 \cdot 21$ vértices). Pela Proposição 13, independentemente de quais arestas tenham sido removidas, sobram $51 \cdot 21 - 1$ arestas. Assim, o número de arestas removidas é

$$\begin{aligned} 51 \cdot 20 + 21 \cdot 50 - (51 \cdot 21 - 1) &= \\ 51(20 - 21) + 21 \cdot 50 + 1 &= \\ -51 + 1050 + 1 &= \\ &= 1000. \end{aligned}$$

Por outro lado, se em qualquer momento fosse removida alguma aresta xy que não pertence a algum ciclo, então, no grafo resultante, não haveria caminho de x até y; logo, ele seria desconexo. Portanto, o número de arestas removidas em nossa estratégia é o maior possível. $\square$

A ideia da prova acima também mostra que todo grafo conexo G, com n vértices, contém como subgrafo (pelo menos) uma árvore formada por todos os n vértices originais e exatamente $n-1$ arestas. Um árvore desse tipo é chamada de **árvore geradora** de G. Isso que dizer que todo grafo conexo com n vértices tem no mínimo $n-1$ arestas, mas podem existir grafos com $n-1$ arestas e que não são conexos (tente construir um exemplo com $n = 5$).

Por fim, também é possível mostrar que, se T é uma árvore, então a adição a G de qualquer aresta nova gera exatamente um ciclo.

Dicas para o Professor

Essa segunda parte da aula traz algumas definições mais formais de conceito relacionados a grafos, especialmente pela grande quantidade de termos técnicos inerentes ao assunto. Ainda assim, boa parte do que expusemos aqui pode ser feito de forma intuitiva. Sugerimos que o conteúdo dessa aula seja abordado em dois encontros de 50 minutos.

Sugestões de Leitura Complementar

Consulte a lista indicada na Parte 1 desse material.