**Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares**

**Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 2**

**Nono Ano**

**Autor: Prof. Ulisses Lima Parente**

**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**3 de junho de 2018**

# 1 A Lei dos Senos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema 2, que é conhecido como a **Lei dos Senos**. Antes, contudo, assim como fizemos na primeira parte para o cosseno, precisamos estender a definição de seno a ângulos retos e obtusos. Para fazê-lo, note que se $\alpha$ é um ângulo obtuso, então:

$$\begin{aligned} 90^{\mathrm{o}} < \alpha < 180^{\mathrm{o}} &\iff -180^{\mathrm{o}} < -\alpha < -90^{\mathrm{o}} \\ &\iff 0^{\mathrm{o}} < 180^{\mathrm{o}} - \alpha < 90^{\mathrm{o}}, \end{aligned}$$

ou seja, $180^{\mathrm{o}} - \alpha$ é um ângulo agudo. Assim, para $90^{\mathrm{o}} < \alpha < 180^{\mathrm{o}}$, definimos o seno de $\alpha$ pondo

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^{\mathrm{o}} - \alpha).$$

Definimos, ainda, $\operatorname{sen} 90^{\mathrm{o}} = 0$.

**Exemplo 1.** *Graças à definição acima, temos que*

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

As razões da extensão da definição de seno dada acima ficarão claras quando, nos módulos do primeiro ano do Ensino Médio, começarmos a estudar os conceitos de seno e o cosseno em situações mais gerais, i.e., no âmbito da *Trigonometria*.

Para o enunciado da Lei dos Senos, recorde que o *círculo circunscrito* a um triângulo é o único círculo que passa por seus vértices.

**Teorema 2.** *Seja $ABC$ um triângulo cujos lados $AB$, $AC$ e $BC$ medem, respectivamente, $c$, $b$ e $a$. Se $R$ denota a medida do raio do círculo circunscrito a $ABC$, então:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \qquad (1)$$

**Prova.** Trataremos apenas o caso em que o triângulo $ABC$ é acutângulo, pois os outros casos podem ser feitos de modo inteiramente análogo.

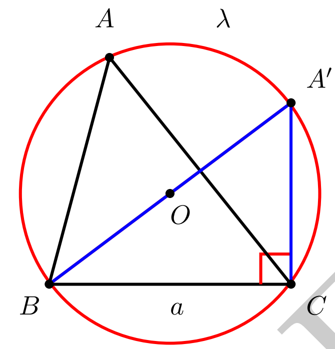
Sejam $\lambda$ o círculo circunscrito a $ABC$ e $O$ o seu centro. Considere o ponto $A'$ sobre $\lambda$, tal que $A'B$ é um diâmetro (veja a figura a seguir).

Note que $A' \neq C$ e $A' \neq A$, pois caso contrário $ABC$ seria retângulo, já que um de seus lados seria um diâmetro de $\lambda$. Assim, temos que $A'BC$ é retângulo em $C$ e, desse modo:

$$\operatorname{sen} \widehat{A'} = \frac{a}{2R} \Longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Agora, veja que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, pois, sendo ângulos inscritos em $\lambda$ subentendendo o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$, temos

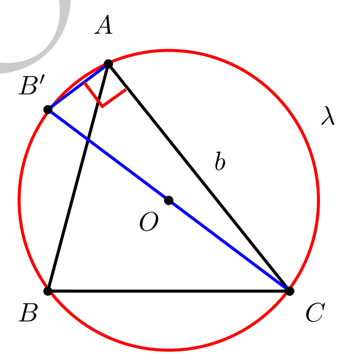
$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot B\widehat{O}C = \widehat{A'}.$$




Portanto, obtemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A'}} = 2R.$$

Argumentos análogos ao executado acima para o vértice $A$, desta feita com o vértice $B$ ou o vértice $C$, fornecem as outras duas igualdades do enunciado. Por exemplo, considerando o ponto $B'$ sobre $\lambda$ tal que o segmento $CB'$ é um diâmetro, obtemos o triângulo $B'AC$, retângulo em $A$ e tal que $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (veja a figura abaixo). Então,




$$\operatorname{sen} \widehat{B'} = \frac{b}{2R} \Longrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R$$

e, daí,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B'}} = 2R.$$

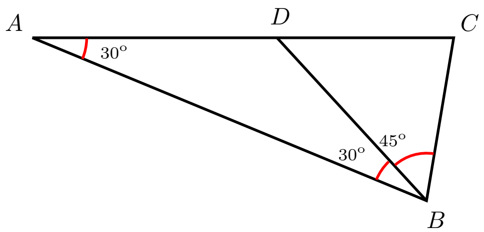
Da mesma forma, tomando o ponto $C'$ sobre $\lambda$ tal que $AC'$ é um diâmetro e repetindo os argumentos anteriores (desenhe uma figura para esse caso e repasse os argumentos correspondentes), chegamos à igualdade

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R.$$

□

Antes de examinarmos algumas consequências importantes da Lei dos Senos, vejamos, em dois exemplos, como tal resultado pode ser aplicado.

**Exemplo 3.** *No triângulo da figura abaixo, temos que* $B\widehat{A}D = A\widehat{B}D = 30^o$, $C\widehat{B}D = 45^o$ *e* $\overline{AB} = 3 + \sqrt{3}$ *cm. Calcule a medida do segmento* $CD$.




**Solução.** Observe inicialmente que, como a soma dos ângulos de todo triângulo é 180°, temos

$$A\widehat{D}B = 180^o - 2 \cdot 30^o = 120^o$$

e, daí,

$$C\widehat{D}B = 180^o - A\widehat{D}B = 160^o - 120^o = 60^o.$$

Assim, aplicando a Lei dos senos ao triângulo $ABD$, juntamente com o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 30^o} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 120^o} &\Longrightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} \\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{3+3\sqrt{3}}{3} \\ &\Longrightarrow \overline{AD} = \frac{\cancel{3}\,(1+\sqrt{3})}{\cancel{3}} \\ &\Longrightarrow \overline{AD} = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Note, agora, que o triângulo $ABC$ é isósceles, pois

$$A\widehat{B}C = 30^o + 45^o = 75^o$$

e (utilizando novamente a soma dos ângulos igual a 180°)

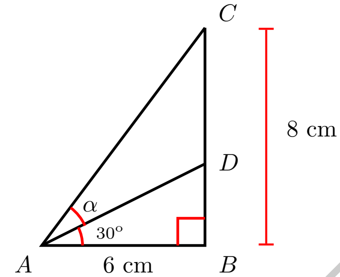
$$A\widehat{C}B = 180^o - (30^o + 75^o) = 180^o - 105^o = 75^o.$$

Portando, fazendo $\overline{CD} = x$ utilizando o fato que $ABC$ isósceles implica $\overline{AB} = \overline{AC}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AC} = \overline{AB} &\Longrightarrow x + 1 + \cancel{\sqrt{3}} = 3 + \cancel{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow x = 2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 4.** *Na figura abaixo,* $ABC$ *é um triângulo retângulo em* $B$, *com catetos* $\overline{AB} = 6$ *cm e* $\overline{BC} = 8$ *cm. Se* $D$ *é um ponto sobre o cateto* $BC$ *tal que* $B\widehat{A}D = 30^o$ *e* $C\widehat{A}D = \alpha$, *quanto vale* $\operatorname{sen}\alpha$*?*




**Solução.** Como na solução do exemplo anterior, calculamos

$$A\widehat{D}B = 180^o - (30^o + 90^o) = 180^o - 120^o = 60^o$$

e

$$A\widehat{D}C = 180^o - 60^o = 120^o.$$

Agora, o Teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 \Longrightarrow \overline{AC}^2 = 100 \Longrightarrow \overline{AC} = 10.$$

Além disso, olhando para o triângulo $ABD$, obtemos:

$$\frac{\overline{BD}}{6} = \operatorname{tg} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \overline{BD} = \frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Daí, segue que

$$\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD} = 8 - 2\sqrt{3}.$$

Finalmente, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo $ADC$ e utilizando novamente o resultado do Exemplo 1, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} A\widehat{D}C} &\Longrightarrow \frac{8-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{10}{\operatorname{sen} 120^o} \\ &\Longrightarrow \frac{8-2\sqrt{3}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{8\sqrt{3}-6}{20} \\ &\Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}. \end{aligned}$$

□

A segunda parte do resultado a seguir traz uma primeira aplicação da Lei dos Senos ao cálculo da área de um triângulo. As igualdades em (2) são conhecidas como as **fórmulas do seno** para a área (de um triângulo).

**Corolário 5.** *Seja* $ABC$ *um triângulo cujos lados* $AB$, $AC$ *e* $BC$ *medem, respectivamente,* $c$, $b$ *e* $a$. *Se* $A(ABC)$ *denota a área de* $ABC$, *então*

$$A(ABC) = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \widehat{B}}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \widehat{C}}{2}. \tag{2}$$

*Se* $R$ *denota o raio do círculo circunscrito a* $ABC$, *temos também que*

$$A(ABC) = \frac{abc}{4R}. \tag{3}$$

**Prova.** Para a primeira parte (isto é, para as fórmulas (2)), é suficiente estabelecermos a primeira delas, uma vez que as outras duas podem ser obtidas de modo análogo.

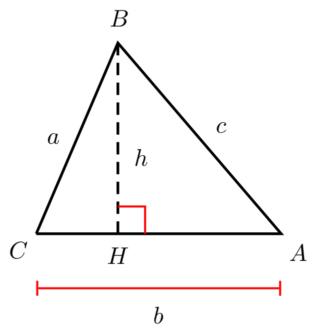
Primeiramente, se $ABC$ é retângulo em $A$, podemos ver $AB$ como base e $AC$ como altura de $ABC$ (ou vice-versa), de sorte que

$$A(ABC) = \frac{bc}{2}.$$

Recordando que sen $90° = 1$, obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{2}.$$

Suponha, agora, que $ABC$ é acutângulo (veja a figura abaixo). Sendo $H$ o pé da altura relativa ao lado $AC$ e




$h = \overline{BH}$, temos:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{h}{c} \Longrightarrow h = c \operatorname{sen} \widehat{A}.$$

Então,

$$A(ABC) = \frac{bh}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{2}.$$

O caso em que $ABC$ é obtusângulo é inteiramente análogo e, por isso, será deixado ao leitor.

Para (3), observe que a Lei dos Senos dá:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{a}{2R}.$$

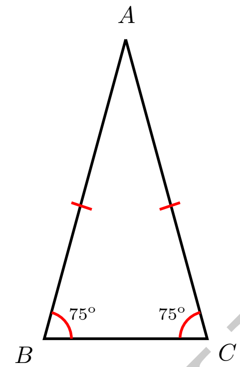
Substituindo tal expressão na primeira igualdade em (2), obtemos

$$A(ABC) = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Os dois exemplos seguintes aplicam as fórmulas do corolário anterior.

**Exemplo 6.** *Calcule a área de um triângulo $ABC$, sabendo que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e $\widehat{B} = 75^o$.*




**Solução.** Iniciamos calculando $B\widehat{A}C$, observando que $\overline{AB} = \overline{AC}$ implica $\widehat{B} = \widehat{C} = 75^o$:

$$\widehat{A} = 180^o - (75^o + 75^o) = 180^o - 150^o = 30^o.$$

Agora, aplicamos a fórmula do seno para a área, obtendo:

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} 30^o}{2} \\ &= \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{4} \\ &= 25 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

□

O próximo exemplo é não trivial, e pode ser omitido numa primeira leitura.

**Exemplo 7.** *Um triângulo $ABC$ é tal que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Sabendo que sua área é igual a $\frac{b^2+c^2}{4}$, calcule as medidas de seus ângulos internos.*

**Solução.** Pondo $\overline{BC} = a$ e aplicando a fórmula do seno para a área, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{\cancel{4}} = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{\cancel{2}} \Longrightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

Agora, um pouco de Álgebra elementar fornece

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2}{2bc} &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc + 2bc}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{2bc} + \frac{2bc}{2bc} \\ &= \frac{(b-c)^2}{2bc} + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Além disso, os passos acima deixam claro que

$$\frac{b^2 + c^2}{2bc} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(b-c)^2}{2bc} = 0 \Longleftrightarrow b = c.$$

Juntando as duas informações acima, concluímos que

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq 1. \qquad (4)$$

Mas, como $\operatorname{sen}\widehat{A} \leq 1$ por definição, segue que devemos ter $\operatorname{sen}\widehat{A} = 1$, de modo que $\widehat{A} = 90^\circ$.

Por outro lado, sendo $\operatorname{sen}\widehat{A} = 1$, as relações em (4) forçam termos

$$\frac{b^2+c^2}{2bc} = 1,$$

de maneira que $b = c$. Então, $ABC$ é retângulo em $A$ e isósceles de base $BC$, de sorte que

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^{\text{o}} - 90^{\text{o}}}{2} = \frac{90^{\text{o}}}{2} = 45^{\text{o}}.$$

$\square$

Terminamos este material apresentando uma outra fórmula útil para o cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecida como **fórmula de Herão**. Tal fórmula expressa a área em função apenas das medidas dos lados do triângulo.

**Corolário 8.** *Se $ABC$ é um triângulo de lados $a$, $b$, $c$ e semiperímetro $p$, então*

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Prova.** Primeiramente, utilizando o Corolário 5 e a relação $\operatorname{sen}^2\widehat{A} = 1 - \cos^2\widehat{A}$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(ABC) = \frac{bc\operatorname{sen}\widehat{A}}{2} &\Rightarrow 2A(ABC) = bc\operatorname{sen}\widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2c^2\operatorname{sen}^2\widehat{A} \\ &\Rightarrow 4[A(ABC)]^2 = b^2c^2\big(1-\cos^2\widehat{A}\big). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a Lei dos Cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Longrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Substituindo tal expressão para $\cos\widehat{A}$ no segundo membro da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = 1 - \cos^2\widehat{A}$$

e aplicando as fórmulas para o quadrado da soma de dois termos e para a diferença de dois quadrados, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= 1 - \Big(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big)^2 \\ &= \Big(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big)\Big(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big) \\ &= \Big(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\Big)\Big(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\Big) \\ &= \frac{\big[(b+c)^2-a^2\big]\big[a^2-(b-c)^2\big]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

Recordando que $2p = a + b + c$, temos $b + c - a = 2p - 2a = 2(p-a)$ e, analogamente, $a + b - c = 2(p-c)$, $a - b + c = 2(p-b)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} &= \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{\cancel{16}p(p-a(p-b)(p-c)}{\cancel{4}b^2c^2} \\ &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}. \end{aligned}$$

Por fim, cancelando $\frac{4}{b^2c^2}$ em ambos os membros da igualdade

$$\frac{4[A(ABC)]^2}{b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},$$

ficamos com

$$[A(ABC)]^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

e a fórmula de Herão segue após extrairmos raízes quadradas em ambos os membros dessa última igualdade. $\square$

**Exemplo 9.** *Calcule a área do triângulo escaleno $ABC$ cujos lados medem* 13 *cm,* 14 *cm e* 15 *cm.*

**Solução.** Vamos usar a fórmula de Herão, para o que começamos calculando o semiperímetro $p$ do triângulo:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Agora, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2} \\ &= 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84. \end{aligned}$$

$\square$

## Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Explique o caso em que o triângulo $ABC$ é obtusângulo tanto no Teorema 2 quanto no Corolário 5, pois, embora os argumentos sejam análogos, é importante que os alunos compreendam o porquê dessa analogia. Recomendamos também que, ao expor os exemplos, sejam sempre ressaltados os momentos nos quais o Teorema 2 ou os Corolários 5 e 8 estão sendo utilizados.

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas de variados graus de dificuldade, envolvendo a Lei dos Senos.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. São paulo, Editora Atual, 2013.