Material Teórico - Módulo Aritmética dos Restos

Divisibilidade e Resto - Parte 3

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de fevereiro de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Ao longo deste material, continuaremos apresentando exemplos que envolvem divisão e resto de números inteiros. Iniciamos com o seguinte

Exemplo 1. *O ano de* 2023 *começou em um domingo. Que dia da semana será o último dia desse ano?*

Solução. Uma vez que uma semana tem 7 dias, os dias da semana repetem-se a cada 7 dias. Por exemplo, se hoje, dia 11 de fevereiro de 2023, é um sábado, daqui a 7 dias estaremos no dia 18 de fevereiro de 2023, que também será um sábado. Perceba que daqui a 14 dias também será um sábado, bem como daqui a 21 dias, 28 dias, e assim por diante.

Tendo em vista que o ano de 2023 — assim como qualquer ano não bissexto — possui 365 dias, serão transcorridos $365 - 1 = 364$ dias desde o primeiro até o último dia desse ano. Agora, quando dividimos 364 por 7, encontramos 52 como quociente e resto igual a 0.

$$\begin{array}{r|l} 3\,6\,4 & 7 \\ \cline{2-2} 1\,4 & 5\,2 \\ 0 & \end{array}$$

Isso significa que o último dia de 2023 será o mesmo dia da semana que o primeiro dia desse ano, ou seja, o último dia de 2023 também será um domingo. □

Exemplo 2. *O ano de* 2024 *começará em uma segunda-feira. Que dia da semana será o último dia desse ano?*

Solução. Como o ano de 2024 é bissexto, ele possui 366 dias, em vez de 365. Logo, serão transcorridos $366 - 1 = 365$ dias desde o primeiro até o último dia desse ano, e a divisão que devemos fazer é $365 \div 7$:

$$\begin{array}{r|l} 3\,6\,5 & 7 \\ \cline{2-2} 1\,5 & 5\,2 \\ 1 & \end{array}$$

Uma vez que $365 = 52 \cdot 7 + 1$, temos que desde o primeiro até o último dia de 2024 são transcorridas 52 semanas inteiras mais 1 dia. Depois de transcorridas 52 semanas inteiras, o dia da semana permanece sendo uma segunda-feira; assim, 1 dia depois disso — o resto da divisão de 365 por 7 — será uma terça-feira. □

Observação 3. *Organizando as ideias apresentadas nos exemplos 1 e 2, temos que qualquer ano não bissexto começa e termina no mesmo dia da semana.*

Isso acontece porque a diferença entre o primeiro e o último dia de um ano desse tipo é de $365 - 1 = 364$ *dias e* $364 = 52 \cdot 7$. *Assim, do primeiro até o último dia de um ano desse tipo é transcorrida uma quantidade inteira de semanas, de sorte que o primeiro e o último dia do ano caem em um mesmo dia da semana.*

Já nos anos bissextos, são transcorridos $366 - 1 = 365$ *dias do primeiro até o último dia. Como* $365 = 52 \cdot 7 + 1$, *o último dia do ano ocorre no dia da semana subsequente ao dia da semana em que ocorre o primeiro dia do ano.*

Exemplo 4. *O ano de* 2023 *começou em um domingo. Em que dia da semana começará o ano de* 2030*?*

Solução. No exemplo 1, vimos que o último dia de 2023 será um domingo, assim como o primeiro dia desse ano. Logo, o primeiro dia de 2024 será uma segunda-feira. Por outro lado, o último dia de 2024 será uma terça-feira, e não uma segunda-feira — primeiro dia desse ano. Vimos que isso acontece porque 2024 possui 366 dias, em vez 365. Assim, o primeiro dia de 2025 será uma quarta-feira. Como 2025 não é bissexto, seu último dia será também uma quarta-feira. Logo, o primeiro e último dias de 2026 — que também não é bissexto — serão quintas-feiras, enquanto o primeiro e último dias de 2027 serão sextas-feiras. O ano de 2028 é bissexto, logo, seu primeiro dia será um sábado, mas seu último será um domingo. Da mesma forma, concluímos que o primeiro e o último dias de 2029 serão segundas-feiras e, portanto, o ano de 2030 começará em uma terça-feira. □

Observação 5. *Vimos, acima, que o primeiro e o último dias de um ano não bissexto ocorrem num mesmo dia da semana e* *que o último dia de um ano bissexto ocorre no dia da semana subsequente ao dia da semana em que ocorre o primeiro dia. Assim, se um ano não for bissexto, então o primeiro dia do ano seguinte cairá no dia da semana subsequente ao dia da semana em que ocorre o primeiro dia desse ano, ao passo que, se um ano for bissexto, então o primeiro dia do ano seguinte cairá dois dias da semana depois do dia da semana em que ocorre o primeiro dia desse ano. Assim, no exemplo 4, para saber em que dia da semana começará o ano de* 2030*, uma alternativa seria contar a quantidade de anos transcorridos de* 1° *de janeiro de* 2023 *até* 1° *de janeiro de* 2030*, somando uma unidade a mais por cada ano bissexto e dividindo o resultado dessa soma por* 7*. Desse modo, obtemos* $7 + 2 = 9$ *e*

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

Portanto, como o resto da divisão de 9 *por* 7 *é* 2*, o dia* 1° *de janeiro de* 2030 *ocorrerá dois dias da semana à frente do domingo — pois* 1° *de janeiro de* 2023 *foi um domingo — ou seja, cairá numa terça-feira.*

Exemplo 6. *Quais os três menores números naturais maiores que* 1 *e que deixam resto* 1 *quando divididos por* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6 *e* 7*?*

Solução. O menor número natural que deixa resto 0 quando dividido por 2, 3, 4, 5, 6 e 7 é $m = \operatorname{mmc}(2,3,4,5,6,7)$. Logo, os três menores números naturais maiores que 1 e que deixam resto 1 quando divididos por 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são obtidos somando 1 aos três menores múltiplos positivos do mmc desses números, que são m, $2m$ e $3m$. Calculando $\operatorname{mmc}(2,3,4,5,6,7)$, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7 & 2 \\ 1,\,3,\,2,\,5,\,3,\,7 & 2 \\ 1,\,3,\,1,\,5,\,3,\,7 & 3 \\ 1,\,1,\,1,\,5,\,1,\,7 & 5 \\ 1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,7 & 7 \\ 1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1 & \end{array}$$

Portanto,

$$m = \text{mmc}\,(2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

e, daí, os três menores números naturais maiores que 1 e que deixam resto 1 quando divididos por 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são $420 + 1 = 421$, $2 \cdot 420 + 1 = 841$ e $3 \cdot 420 + 1 = 1261$. □

A seguir, vamos apresentar critérios de divisibilidade por 3, 9, 11 e 7.

A título de ilustração do argumento geral para a dedução dos critérios de divisibilidade por 3, 9, 11, encontremos o resto da divisão de 8459 por 3 e por 9 do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
8459 &= 8000 + 400 + 50 + 9 \\
&= 8 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 9 \\
&= 8 \cdot (999 + 1) + 4 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 9 \\
&= (8 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (8 + 4 + 5 + 9) \\
&= (8 \cdot 111 + 4 \cdot 11 + 5) \cdot 9 + (8 + 4 + 5 + 9).
\end{aligned}$$

Como $9 \cdot (8 \cdot 111 + 4 \cdot 11 + 5)$ é claramente divisível por 9 — e, portanto, divisível por 3 —, para sabermos o resto da divisão de 8459 por 3 (respectivamente por 9) basta calcular o resto por 3 (respectivamente por 9) de $8 + 4 + 5 + 9$, que é a soma dos algarismos do número 8459.

Uma vez que

$$8 + 4 + 5 + 9 = 26 = 3 \cdot 8 + 2,$$

concluímos que 8459 deixa resto 2 quando dividido por 3. Para saber o resto por 9, procedemos da mesma forma: observando que $26 = 9 \cdot 2 + 8$, concluímos que o resto da divisão de 8459 por 9 é 8.

Podemos generalizar a ideia acima para obter a seguinte

Proposição 7. *O resto da divisão de um número natural por* 3 *(por* 9*) é igual ao resto da divisão da soma dos algarismos desse número por* 3 *(por* 9*). Em particular, um número natural é divisível por* 3 *(por* 9*) se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por* 3 *(por* 9*).*

Prova. Demonstremos a proposição primeiramente no caso em que $n = abcd$, um número natural formado por quatro algarismos. Então, podemos repetir o raciocínio do exemplo numérico discutido anteriormente para escrever

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d \\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\ &= (111a + 11b + c) \cdot 9 + (a + b + c + d). \end{aligned}$$

Como $(111a + 11b + c) \cdot 9$ é claramente múltiplo de 9 — logo, também múltiplo de 3 —, concluímos que o resto da divisão de $abcd$ por 3 (por 9) é igual ao resto da divisão de $a+b+c+d$ por 3 (por 9).

A demonstração do caso em que n possui uma quantidade de algarismos qualquer segue a mesma ideia, exceto pelo emprego de uma notação mais elaborada. $\square$

Exemplo 8.

(*a*) *Mostre que* 1, 100 *e* 10000 *deixam resto* 1, *mas* 10, 1000 *e* 100000 *deixam resto* 10 *quando divididos por* 11.

(*b*) *Use o item anterior para concluir que o resto da divisão de* 273945 *por* 11 *coincide com o resto da divisão, por* 11, *de* $(5 + 9 + 7) - (4 + 3 + 2)$ — *o número formado pela diferença entre as somas dos algarismos das ordens ímpares e pares.*

Solução.

(a) Observe as divisões abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 11 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 11 \\ \hline 1 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10000 & 11 \\ \hline 100 & 909 \\ 1 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{r|l} 10 & 11 \\ \hline 10 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1000 & 11 \\ \hline 10 & 90 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100000 & 11 \\ \hline 100 & 9090 \\ 10 & \end{array}$$

Desse modo, concluímos que 1, 100 e 10000 deixam resto 1, mas 10, 1000 e 100000 deixam resto 10 quando divididos por 11.

(b) Utilizando as divisões obtidas no item (a), podemos escrever

$$\begin{aligned}
273945 &= 2 \cdot 100000 + 7 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 \\
&\quad + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \\
&= 2 \cdot (9090 \cdot 11 + 10) + 7 \cdot (909 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 3 \cdot (90 \cdot 11 + 10) + 9 \cdot (9 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 4 \cdot 10 + 5 \\
&= 2 \cdot (9090 \cdot 11 + (11 - 1)) + 7 \cdot (909 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 3 \cdot (90 \cdot 11 + (11 - 1)) + 9 \cdot (9 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 4 \cdot (11 - 1) + 5 \\
&= 2 \cdot (9091 \cdot 11 - 1) + 7 \cdot (909 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 3 \cdot (91 \cdot 11 - 1) + 9 \cdot (9 \cdot 11 + 1) \\
&\quad + 4 \cdot (11 - 1) + 5 \\
&= 11 \cdot (2 \cdot 9091 + 7 \cdot 909 + 3 \cdot 91 + 9 \cdot 9 + 4) \\
&\quad + (5 + 9 + 7) - (4 + 3 + 2).
\end{aligned}$$

Assim, como $11 \cdot (2 \cdot 9091 + 7 \cdot 909 + 3 \cdot 91 + 9 \cdot 9 + 4)$ é claramente um múltiplo de 11, temos que os restos das divisões de 273945 e $(5 + 9 + 7) - (4 + 3 + 2) = 12$ por 11 são iguais. Veja que esse resto é igual a 1, pois $12 = 1 \cdot 11 + 1$.

$\square$

Podemos repetir a ideia utilizada na solução do exemplo 8 para obter a seguinte

Proposição 9 (Critério de divisibilidade por 11)**.** *O resto da divisão de um número natural por* 11 *é o mesmo resto da divisão, por* 11*, da diferença entre as somas dos algarismos das ordens ímpares e das ordens pares desse número. Em particular, um número natural é divisível por* 11 *se, e somente* *se, a diferença entre as somas dos algarismos das ordens ímpares e das ordens pares desse número for divisível por* 11.

Prova. Novamente, ilustremos a demonstração geral considerando, inicialmente, o caso em que $n = abcd$, com a,b,c,d algarismos. Temos

$$\begin{aligned} n &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (1001 - 1)a + (99 + 1)b + (11 - 1)c + d \\ &= (11 \cdot 91a + 11 \cdot 9b + 11c) + (-a + b - c + d) \\ &= 11(91a + 9b + c) - [(a + c) - (b + d)]. \end{aligned}$$

Como $11(91a + 9b + c)$ é um múltiplo de 11, concluímos que o resto de n na divisão por 11 coincide com o resto de $(a + c) - (b + d)$ na divisão por 11.

O caso geral é essencialmente análogo, uma vez que observemos que, para k natural:

(i) 10^{2k} deixa resto 1 quando dividido por 11, pois

$$\begin{aligned} 10^{2k} &= 100^k = (99 + 1)^k \\ &= (99 + 1)(99 + 1) \ldots (99 + 1) \\ &= 99q + 1 = 11 \cdot 9q + 1 \end{aligned}$$

para algum $q \in \mathbb{N}$;

(ii) 10^{2k+1} deixa resto 10 quando dividido por 11, pois

$$10^{2k+1} = 10^{2k} \cdot 10 = (11 \cdot 9q + 1) \cdot 10 = 11 \cdot 90q + 10$$

para algum $q \in \mathbb{N}$. $\square$

Agora, apresentaremos um critério de divisibilidade por 7 e, em seguida, uma aplicação desse critério.

Proposição 10. *Se a e b são números naturais, então $10a + b$ é divisível por 7 se, e somente se, $a - 2b$ é divisível por 7.*

Prova. Inicialmente, suponha que $10a + b$ é divisível por 7. Então existe um inteiro k tal que $10a + b = 7k$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 10a + b = 7k &\Longrightarrow 10a + (21b - 20b) = 7k \\ &\Longrightarrow 10a - 20b + 21b = 7k \\ &\Longrightarrow 10(a - 2b) = 7(k - 3b). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $7 \mid [10(a - 2b)]$. Mas, como $\operatorname{mdc}(7,10) = 1$, segue daí que $7 \mid (a - 2b)$, ou seja, $a - 2b$ é divisível por 7.

Reciprocamente, suponha que $a - 2b$ é divisível por 7, ou seja, que existe k inteiro tal que $a - 2b = 7k$. Então,

$$\begin{aligned} a - 2b = 7k &\Longrightarrow 10(a - 2b) = 70k \\ &\Longrightarrow 10a - 20b = 70k \\ &\Longrightarrow 10a + b - 21b = 70k \\ &\Longrightarrow 10a + b = 7(10k + 3b). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $7 \mid (10a + b)$. □

Exemplo 11. *Utilize o critério apresentado na proposição 10 para verificar se os números abaixo são divisíveis por 7.*

(*a*) 182.

(*b*) 237.

(*c*) 2618.

Solução.
(a) Temos que $182 = 10 \cdot 18 + 2$. Logo (com $a = 18$ e $b = 2$ na proposição anterior), 182 é divisível por 7 se, e somente se, $18 - 2 \cdot 2 = 14$ é divisível por 2. Como $14 = 2 \cdot 7$, concluímos que 182 também é divisível por 7.

(b) Como $237 = 10 \cdot 23 + 7$, fazendo $a = 23$ e $b = 7$ na proposição anterior concluímos que 237 é divisível por 7 se, e somente se, $23 - 2 \cdot 7 = 9$ também o for. Assim, 237 não é divisível por 7.

(c) Uma vez que $2618 = 10 \cdot 261 + 8$, fazendo $a = 261$ e $b = 8$ na proposição anterior vemos que 2618 é divisível por 7 se, e somente se, $261 - 2 \cdot 8 = 245$ é divisível por 7. Por sua vez, como $245 = 10 \cdot 24 + 5$, fazendo $a = 24$ e $b = 5$ na proposição anterior vemos que 245 é divisível por 7 se, e somente se, $24 - 2 \cdot 5 = 14$ é divisível por 7. Então, 2618 é divisível por 7. □

Observação 12. *Diferentemente dos critétios de divisibilidade por* 3*,* 9 *e* 11*, que fornecem o resto da divisão de um número natural por qualquer um desses números, o critério de divisibilidade por* 7 *só é aplicado para verificar a divisibilidade por* 7*, não fornecendo o resto da divisão. De fato, no item (b) do exemplo 11, podemos calcular diretamente o resto da divisão de* 237 *por* 7*.*

$$\begin{array}{r|l} 2\,3\,7 & 7 \\ \cline{2-2} 2\,7 & 3\,3 \\ 6 & \end{array}$$

Entretanto, o resto da divisão de $23-2\cdot 7 = 9$ *por* 7 *é diferente, como podemos ver na divisão abaixo.*

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

Um outro aspecto do critéio de divisão por 7 *é que, para números n grandes, ele checa (manualmente) a divisibilidade por* 7 *muito rapidamente. Realmente, se* $n = 10a + b$*, com* $a,b \in \mathbb{N}$ *e* b *algarismo, então* $a - 2b < \frac{n}{10}$*.*

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicarem as soluções. Ressaltamos a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios próprios. Por outro lado, ainda que eles não as encontrem, ou apresentem soluções erradas, esse processo é fundamental para a aprendizagem.

Idealmente, apresente aos alunos outros exemplos que possam ser resolvidos com as técnicas utilizadas nos exemplos 1, 2 e 4. Uma possibilidade é propor que eles descubram o dia da semana em que ocorrerá um evento em uma data distante, para que eles possam utilizar a ideia do exemplo 4.

Também é recomendável apresentar outras aplicações dos critérios de divisibilidade, as quais podem ser encontradas nas referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. C. Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, SBM, 2022.

2. D. Fomim, S. Genkin e I. Itenberg. *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*. Rio de Janeiro, IMPA 2012.