Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 1

Limites Laterais

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

06 de outubro de 2020

1 Uma função sem limite em 0

Agora que já estudamos o conceito de limite, vejamos o que ele diz sobre o comportamento, em 0, da função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|x|}{x} \end{array}. \tag{1}$$

Para tanto, comecemos recordando que

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases},$$

de forma que, sendo $x \neq 0$, temos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, \text{ se } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

O gráfico de f se encontra esboçado a seguir:

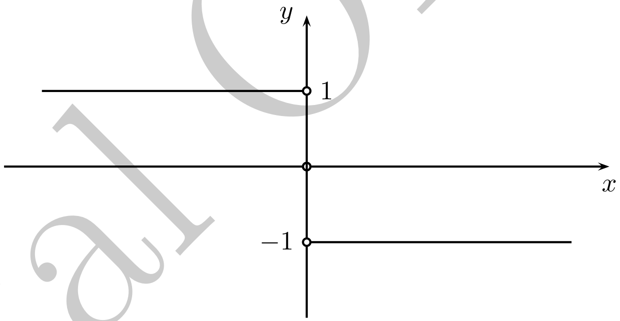

Figura 1: gráfico de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

A fim de que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista e seja igual a um certo real ℓ, a definição de limite impõe que, dado um erro $\epsilon > 0$ para ℓ, exista um erro $\delta > 0$ para 0 tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Além disso, veja que a sentença acima não faz restrição sobre x ser positivo ou negativo. A única coisa que importa é que a desigualdade $0 < |x - 0| < \delta$ valha.

Escolhamos $\epsilon = 1$ e vejamos o que acontece, ainda admitindo que o limite exista. Tomando um $\delta > 0$ cuja existência é garantida pela definição de lmite, devemos ter que:

$$0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1 \Rightarrow |1 - \ell| < 1.$$

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1 \Rightarrow |-1 - \ell| < 1.$$

Então, no final das contas as desigualdades $|1 - \ell| < 1$ e $|-1-\ell| < 1$ têm de valer para que o limite exista. Como $|-1-\ell| = |-(1+\ell)| = |1+\ell|$, devemos, pois, ter

$$|1 - \ell| < 1 \ \text{ e } \ |1 + \ell| < 1.$$

Essas desigualdades não podem ser simultaneamente verdadeiras, pois, se fossem verdadeiras, teríamos, por um lado,

$$|1 - \ell| + |1 + \ell| < 1 + 1 = 2;$$

por outro, a desigualdade triangular daria

$$|1 - \ell| + |1 + \ell| \geq |(1 - \ell) + (1 + \ell)| = 2.$$

As duas desigualdades acima são contraditórias, o que nos leva a concluir que a premissa da qual partimos (isto é, de que $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$) não é verdadeira. Assim, $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe nesse caso.

Geometricamente, a figura 1 deixa claro o que está acontecendo: quando nos aproximamos de 0 por valores *positivos* de x, os números $f(x)$ valem 1, logo, se aproximam de 1; por outro lado, quando nos aproximamos de 0 por valores *negativos* de x, os números $f(x)$ valem -1, logo, se aproximam de -1. Entretanto, a definição de limite dada no material anterior não faz distinção entre valores positivos ou negativos de x; a fim de que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista e valha ℓ, os valores $f(x)$ devem ser boas aproximações para ℓ quando x for uma boa aproximação para 0, não interessando se x for positivo ou negativo.

2 Limites laterais

Ainda em relação ao exemplo discutido na seção anterior, veja que, apesar de $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existir, os valores $f(x)$ valem sempre 1 quando $x > 0$ e sempre -1 quando $x < 0$. Portanto, teria sentido escrevermos $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ se x variasse somente sobre reais positivos, e $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ se x variasse somente sobre reais negativos. A discussão a seguir relaxa a definição de limite a fim de contemplar essa situação mais geral.

Definição 1. *Sejam dados um intervalo aberto* (a,b), *um ponto* $x_0 \in (a,b)$ *e uma função* $f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

(i) *Dizemos que* f *tem* **limite lateral à esquerda** *igual a* ℓ_1, *e denotamos* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \ell_1$ *se, para cada* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in (a,b) \text{ e } x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \epsilon. \quad (2)$$

(ii) *Dizemos que* f *tem* **limite lateral à direita** *igual a* ℓ_2, *e denotamos* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \ell_2$, *se, para cada* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in (a,b) \text{ e } x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \epsilon. \quad (3)$$

A Figura 2 fornece uma interpretação geométrica da noção de limite lateral à direita. Nela, observe que, para $0 < |x - x_0| < \delta$, o ponto sobre o gráfico de f com abscissa x só se encontra na faixa cinza quando $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Deixamos como exercício para o leitor a composição de uma figura que forneça a interpretação geométrica correspondente para limites laterais à esquerda.

Assim, para a função (1), a discussão da seção anterior deixa claro que

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$

Observamos também que, para uma função $f : (a,x_0) \to \mathbb{R}$, as noções de limite e limite lateral à esquerda de f em

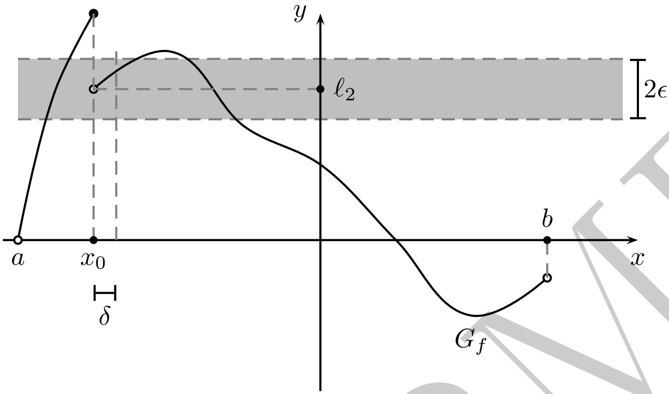

Figura 2: limite lateral à direita.

x_0 coincidem. Isto porque não há como tomarmos um real $x > x_0$ no intervalo (a,x_0).

Nesses casos, em geral escreveremos $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, em vez de $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \ell$. Evidentemente, observações análogas a essas são válidas para limites e limites laterais à direita em x_0, para funções $f : (x_0,b) \to \mathbb{R}$.

Exemplo 2. *Seja* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$. *Verifique, usando a definição, que* $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$ *e* $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.

Suponhamos, agora, dado um intervalo aberto (a,b), um ponto $x_0 \in (a,b)$ e uma função $f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Admitamos, ainda, que existam os limites laterais $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \ell_2$. Na seção anterior, vimos que, se $\ell_1 \neq \ell_2$, então $\lim_{x\to x_0} f(x)$ não existe. E se $\ell_1 = \ell_2$? O resultado a seguir responde essa pergunta.

Proposição 3. *Sejam dados um intervalo aberto* (a,b), *um ponto* $x_0 \in (a,b)$ *e uma função* $f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. *Então,* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe se, e só se,* existem e são iguais *os limites laterais* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$. *Ademais, sendo* *esse o caso, temos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

Prova. Suponhamos, inicialmente, que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a,b),\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Em particular, para

$$x \in (a,b),\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

e

$$x \in (a,b),\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \ell. \tag{4}$$

Reciprocamente, suponhamos que (4) valha. Então, dado um erro $\epsilon > 0$, existem erros $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in (a,b),\ x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

e

$$x \in (a,b),\ x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $\delta > 0$ e

$$x \in (a,b),\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

e

$$x \in (a,b),\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Por fim, como para $x \in (a,b)$ temos que $0 < |x - x_0| < \delta$ equivale a $x_0 - \delta < x < x_0$ ou $x_0 < x < x_0 + \delta$, as duas últimas afirmações podem ser resumidas escrevendo:

$$x \in (a,b),\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Veja que isso é o mesmo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. $\square$

O próximo exemplo ilustra como utilizar a proposição anterior. Note que $\lim_{x\to 0} f(x)$, apesar de existir nesse caso, nada tem a ver com $f(0)$.

Exemplo 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2, & se\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x = 0 \end{cases}.$$

Decida se $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe e, se existir, o calcule.

Prova. Consideremos, primeiramente, o caso $x > 0$. Nessa situação, temos que

$$|f(x) - 2| = |x^3 + x| = x^3 + x.$$

Portanto, dado um erro $\epsilon > 0$, a fim de que $|f(x) - 2| < \epsilon$, basta que $x^3 + x < \epsilon$.

Se $0 < x < 1$ (isto é, se de partida tomarmos $\delta \leq 1$), então $x^3 < x$, de forma que $x^3 + x < 2x$. Assim, a fim de que $x^3 + x < \epsilon$, para $0 < x < \delta \leq 1$, basta que tenhamos $2x < \epsilon$, isto é, $x < \frac{\epsilon}{2}$.

Portanto, tomando

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2}\}, \tag{5}$$

teremos que

$$0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| = x^3 + x < 2x < \epsilon,$$

conforme desejado. Segue que $\lim_{x\to 0+} f(x) = 2$.

Para $x < 0$, veja que $x^3 < 0$, de forma que

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= |x^3 + x| \\ &= -(x^3 + x) \\ &= (-x)^3 + (-x) \\ &= |f(-x) - 2|. \end{aligned}$$

Portanto, teremos $|f(x) - 2| < \epsilon$ se $|f(-x) - 2| < \epsilon$. Então, escolhendo $\delta > 0$ como em (5), teremos que

$$\begin{aligned} -\delta < x < 0 &\Rightarrow 0 < -x < \delta \\ &\Rightarrow |f(-x) - 2| < \epsilon \\ &\Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que $\lim_{x\to 0-} f(x) = 2$. □

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos cada.

No primeiro encontro, discuta o material da primeira seção, enfatizando que a diferença entre os comportamentos de $f(x)$ para $x > 0$ e $x < 0$ implica a inexistência de $\lim_{x\to 0} f(x)$. Discuta também o Exemplo 4, apoiando-se no gráfico de $f(x) = x^3 + x + 2$ (sem, contudo, formalizar o conceito de limite lateral), para desenvolver nos alunos a intuição de que a existência igualdade dos limites laterais implica a existência do limite.

O segundo encontro deve ser destinado a discutir o conceito de limite lateral, culminando com a demonstração da Proposição 3. Nesse sentido, você deve enfatizar a equivalência entre a aproximação $0 < |x - x_0| < \delta$ e uma das aproximações $x_0 - \delta < x < x_0$ ou $x_0 < x < x_0 + \delta$. Em seguida, o Exemplo 4 deve ser discutido em detalhe.

Mais exemplos e resultados relacionados ao conceito de limite lateral podem ser vistos nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.