Material Teórico - Módulo Binômio de Newton e Triangulo de Pascal

Soma de Elementos em Linhas, Colunas e Diagonais

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste material teórico iremos estudar relações entre números binomiais, envolvendo as suas posições no Triângulo de Pascal. Além da relação de Stifel, e do fato de que podemos facilmente calcular a soma de todos os números em uma linha de tal triângulo, veremos que também é possível calcular a somas dos p primeiros termos de uma coluna ou de uma diagonal, onde p é um natural qualquer. Veremos também algumas aplicações desses fatos. Aqui, n sempre representará um inteiro não negativo e, quando escrevermos “linha n”, estaremos nos referindo à linha n do Triângulo de Pascal, ou seja, àquela que começa com $\binom{n}{0}$. Do mesmo modo, “coluna n” se refere à coluna n do Triângulo de Pascal, i.e., aquela que começa com $\binom{n}{n}$.

Comecemos relembrando o que vimos até agora.

2 O teorema das linhas

O seguinte fato é conhecido como o “Teorema das Linhas”.

A *soma dos números da ‘linha n’* do Triângulo de Pascal é igual a 2^n:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

A Figura 1 ilustra o que acontece nas primeiras linhas. Lembre-se de que já nos deparamos com tal fato várias vezes, tendo exibido tanto provas algébricas (fazendo as contas com a fórmula do Binômio de Newton, no material anterior a este), como provas que usam apenas argumentos combinatórios (veja, por exemplo, o material sobre Combinações do Módulo Princípios Básicos de Contagem).

Linha 0: $1 \longrightarrow 2^0=1$

Linha 1: $1+1 \longrightarrow 2^1=1$

Linha 2: $1+2+1 \longrightarrow 2^2=2$

Linha 3: $1+3+3+1 \longrightarrow 2^3=4$

Linha 4: $1+4+6+4+1 \longrightarrow 2^4=8$

Linha 5: $1+5+10+10+5+1 \longrightarrow 2^5=16$

Figura 1: somas dos números de uma linha do Triângulo de Pascal.

Vejamos, a seguir, uma aplicação simples do Teorema das Linhas.

Exemplo 1. *Encontre o valor da seguinte soma:*

$$S=\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\ldots+\binom{10}{10}.$$

Solução. Apesar de que essa não é a soma de uma linha inteira do Triângulo de Pascal, faltam apenas três parcelas para obtermos todas as entradas da linha 10. Portanto, aplicando o Teorema das Linhas, obtemos

$$\begin{aligned}S&=\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\ldots+\binom{10}{10}\right)+\\&\quad-\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\right)\\&=2^{10}-\left(\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\right)\\&=1024-1-10-45\\&=968.\end{aligned}$$

Veja que é bem mais rápido calcular apenas os três binomiais que faltavam do que cada um dos outros oito. □

Os exemplos seguintes são aplicações não do Teorema das Linhas em si, mas da ideia aplicada para demonstrá-lo usando a fórmula do Binômio de Newton.

Exemplo 2. *Para um inteiro positivo n fixado, mostre que a soma dos binomiais do tipo $\binom{n}{i}$, onde i é par, é igual à metade da soma de todos os binomiais da linha n.*

Prova. Lembre-se de que, pela fórmula do Binômio de Newton, temos, para quaisquer x e y reais,

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots\\&\quad\cdots+\binom{n}{i}x^{n-i}y^i+\cdots+\binom{n}{n}y^n.\end{aligned}$$

Em particular, tomando $x=y=1$, obtivemos que a soma de todos os binômios na linha n é igual a 2^n. Por outro lado, para conseguirmos ‘separar’ os termos onde i é par daqueles onde i é ímpar, basta fazermos $x=1$ e $y=-1$. Nesse caso, temos:

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Veja que as parcelas positivas da soma acima são justamente as do tipo $\binom{n}{i}$, onde i é par, ao passo que as negativas são as do tipo $\binom{n}{i}$, onde i é ímpar. Como a soma total é igual a zero, concluímos que a soma dos binomiais $\binom{n}{i}$, com i par, é igual à soma daqueles com i é ímpar. É então claro que, nesse caso, cada uma dessas duas somas corresponde à metade da soma de todos os binomiais na linha n do Triângulo de Pascal, ou seja, é igual a $\frac{1}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}$. □

Exemplo 3. *À guisa de ilustração, observe que, como caso particular do exemplo anterior, a soma dos binomiais da linha 4 que pertencem a colunas pares é*

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}=1+6+1=8=2^3,$$

enquanto a soma daqueles que pertencem a colunas pares é

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8 = 2^3.$$

Exemplo 4. *Encontre o valor da soma*

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}.$$

Solução. Vamos usar o fato de que, para todo inteiro i com $1 \leq i \leq n$, vale:

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}.$$

Realmente,

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i} &= i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} &= \sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} = n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o Teorema das Linhas na última igualdade acima. □

Problema 5 (Puc-Rio)**.** *Sejam $A_0, \ldots, A_{2n}$ números reais tais que, para todo x real, tenhamos*

$$(1 + x + x^2)^n = A_0 + A_1x + \ldots + A_{2n}x^{2n}. \qquad (1)$$

(a) Encontre o valor de $A_0 + A_1 + \ldots + A_{2n}$.

(b) Encontre o valor da soma dos A_i tais que i é par, ou seja, $A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}$.

Solução. Como a identidade (1) deve valer para qualquer valor de x, podemos testar o que acontece escolhendo alguns valores específicos.

(a) Tomando $x = 1$, todas as potências x^i passam a ser iguais a 1 e o lado direito de (1) torna-se igual à soma desejada. Então, temos que

$$3^n = (1 + 1 + 1^2)^n = A_0 + A_1 + \ldots + A_{2n}.$$

(b) Aqui, iremos começar substituindo x por -1, de onde concluímos que

$$1 = (1 + (-1) + (-1)^2)^n = A_0 - A_1 + A_2 - \ldots + A_{2n}.$$

Agora, chamando de P a soma dos A_i onde i é par e de I a soma daqueles onde i é ímpar, obtemos, a partir dessa última relação, que $P - I = 1$. Por outro lado, pelo item anterior, já sabíamos que $P + I = 3^n$. Somando membro a membro essas duas igualdades, obtemos $2P = 3^n + 1$ e, daí,

$$P = \frac{3^n + 1}{2}.$$

□

3 A relação de Stifel

Como já apresentada no material teórico anterior, essa é outra importante relação que devemos lembrar.

> (*Relação de Stifel*) Para k e n inteiros, com $1 \leq k \leq n$, vale que:
>
> $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Aqui, vale a pena ressaltarmos como esses termos são posicionados no Triângulo de Pascal (veja a Figura 2). Desenhando o triângulo de forma que suas linhas estejam alinhadas à esquerda, a relação de Stifel é visualizada assim: $\binom{n}{k-1}$ e $\binom{n}{k}$ são entradas vizinhas em uma mesma linha, enquanto $\binom{n+1}{k}$ fica logo abaixo de $\binom{n}{k}$:

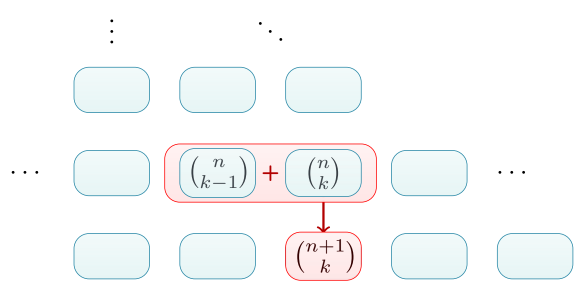

Figura 2: a relação de Stifel.

4 O teorema das colunas

Ao contrário das linhas do Triângulo de Pascal, que sempre possuem uma quantidade finita de elementos, veja que cada uma de suas colunas possui uma quantidade infinita de entradas. Sendo assim, não faz sentido calcularmos a soma de todos os elementos de uma coluna, pois tal soma não é um número real (vulgarmente, dizemos que tal soma é *infinita* pois os termos da coluna são todos inteiros positivos, logo, maiores ou iguais a 1).

Por outro lado, uma pergunta natural é o que acontece se somarmos apenas uma certa quantidade finita de termos "iniciais" de uma coluna. O Teorema das Colunas nos mostra como calcular tal soma. Para tanto, veja inicialmente que o primeiro elemento da coluna n sempre é $\binom{n}{n} = 1$, ao passo que aqueles que o seguem são $\binom{n+1}{n}, \binom{n+2}{n}, \ldots$, e assim por diante.

Teorema 6. *Dados inteiros não negativos n e p, a soma dos $p+1$ primeiros números da coluna n do Triângulo de Pascal (veja a Figura 3) é:*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}. \qquad (2)$$

Prova. Faremos uma prova inteiramente algébrica, ou seja, sem o uso de argumentos de contagem. A ideia é calcular de duas formas diferentes o coeficiente de um determinando termo de um polinômio, qual seja:

$$P(x) = x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + \ldots + x(1+x)^{n+p}. \qquad (3)$$

Se expandirmos cada uma das parcelas dessa soma, obtemos um polinômio da forma

$$P(x) = a_1 x + \ldots + a_{n+p+1} x^{n+p+1},$$

para certos números reais $a_1, \ldots, a_{n+p+1}$.

Vamos calcular o coeficiente a_{n+1} de x^{n+1} em $P(x)$. Para tanto, veja que a_{n+1} pode ser obtido calculando-se o coeficiente de x^{n+1} na expansão de cada um dos termos $x(1+x)^{n+i}$ e, em seguida, somando-se esses valores para cada i, com $0 \leq i \leq n+p$.

Claramente, o coeficiente de x^{n+1} na expansão da parcela $x(1+x)^{n+i}$ é igual ao coeficiente de x^n na expansão de $(1+x)^{n+i}$; por sua vez, pela fórmula do Binômio de Newton, esse último coeficiente é igual a $\binom{n+i}{n}$. Então, fazendo i variar de 0 a p, obtemos:

$$a_{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n}.$$

Agora, vamos calcular o valor de a_{n+1} de outra maneira. Observe que a expressão original para $P(x)$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo $x(1+x)^n$ e razão $(1+x)$. Portanto, aplicando a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita, obtemos:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x(1+x)^{n+p+1} - x(1+x)^n}{(1+x)-1} \\ &= (1+x)^{n+p+1} - (1+x)^n. \end{aligned}$$

Por fim, desenvolvendo essa última expressão, novamente com o auxílio da fórmula do Binômio de Newton, temos que o coeficiente de x^{n+1} é igual a $\binom{n+p+1}{n+1}$ em $(1+x)^{n+p}$ e igual a 0 em $(1+x)^n$. Portanto,

$$a_{n+1} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Como os dois valores obtidos para a_{n+1} têm que ser iguais, obtemos que o Teorema das Colunas é válido. $\square$

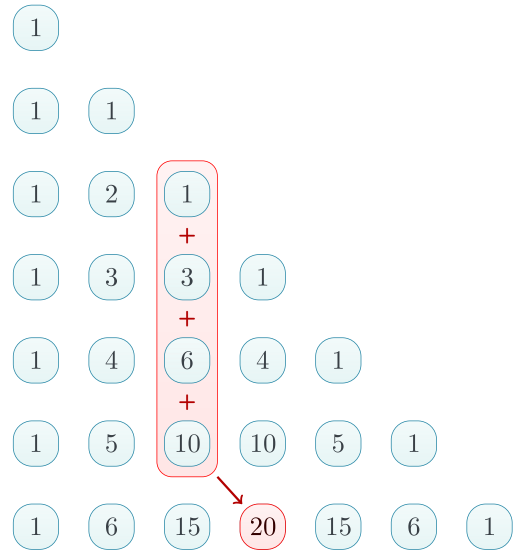

Figura 3: a soma dos quatro primeiros elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal.

Exemplo 7. *Como caso particular do Teorema das Colunas, quando $n = 2$ e $p = 3$, ele nos diz que*

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}.$$

Os valores desse binomiais são exibidos na Figura 3.

Observe que o Teorema das Colunas só pode ser aplicado se a soma for tomada começando pelo primeiro elemento da coluna que está sendo considerada. Contudo, é possível obter outras somas de termos consecutivos aplicando-se o teorema duas vezes, conforme ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 8. *Encontre o valor da soma*

$$A = \binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{20}{3}.$$

Solução. Sejam

$$\begin{aligned} B &= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{20}{3}, \\ C &= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{8}{3}, \end{aligned}$$

e perceba que $A = B - C$. Agora, pelo Teorema das Colunas, temos $B = \binom{21}{4}$ e $C = \binom{9}{4}$. Sendo assim,

$$A = \binom{21}{4} - \binom{9}{4} = 5985 - 126 = 5859.$$

$\square$

5 O teorema das diagonais

De forma análoga à seção anterior, queremos encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros elementos de uma diagonal do Triângulo de Pascal. Aqui, quando dizemos *diagonal*, estamos nos referindo a uma *diagonal principal*, i.e., a uma sequência de termos que começa na coluna 0 e tal que os termos seguintes são obtidos avançando-se, a cada passo, uma unidade tanto na linha quanto na coluna do triângulo. Assim, começamos com um número binomial da forma $\binom{n}{0}$ e continuamos para $\binom{n+1}{1}$, $\binom{n+2}{2}$, ..., e assim por diante. Nesse caso, dizemos que se trata da *diagonal* n do Triângulo de Pascal. (Para um caso particular, veja a Figura 4.)

O resultado desejado é o seguinte, sendo conhecido como o *Teorema das Diagonais*.

Teorema 9. *Dados inteiros não negativos n e p, a soma dos $p+1$ primeiros números da diagonal n do Triângulo de Pascal é:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}. \tag{4}$$

Prova. Dessa vez, faremos um prova inteiramente combinatória. Para tanto, vamos contar de duas maneiras diferentes o número de soluções da inequação

$$x_1+\ldots+x_{n+1}\le p, \tag{5}$$

onde $x_1, \ldots, x_{n+1}$ são números inteiros não negativos.

Lembre-se de que, no material teórico sobre Combinações Completas, apresentamos como resolver o problema análogo a esse, no caso em que temos uma igualdade no lugar de uma desigualdade. Aqui, basta observar que a inequação (5) vale se, e só se, existe um inteiro r tal que $x_1+\ldots+x_{n+1}=r$, com $0\le r\le p$. Para cada valor de r, o número de soluções dessa equação é

$$CR_{n+1,r}=\binom{(n+1)-1+r}{r}=\binom{n+r}{r}.$$

Então, somando as quantidades de soluções obtidas para cada valor de r, obtemos

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+p}{p}, \tag{6}$$

que é o lado esquerdo de (4).

Por outro lado, veja que (5) vale se, e só se, existe um inteiro não negativo f tal que

$$x_1+\ldots+x_{n+1}+f=p. \tag{7}$$

(Pense em f como a 'folga' que temos na inequação original (5).) Veja, também, que cada solução da inequação (5), com $x_1,\ldots,x_{n+1}$ inteiros não negativos, corresponde, de forma única, a uma solução da equação (7), e que a quantidade de tais soluções é

$$CR_{n+2,p}=\binom{(n+2)-1+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}. \tag{8}$$

Agora, como tanto (6) quanto (8) representam o número de soluções inteiras e não negativas da mesma inequação, temos que eles devem ser iguais. $\square$

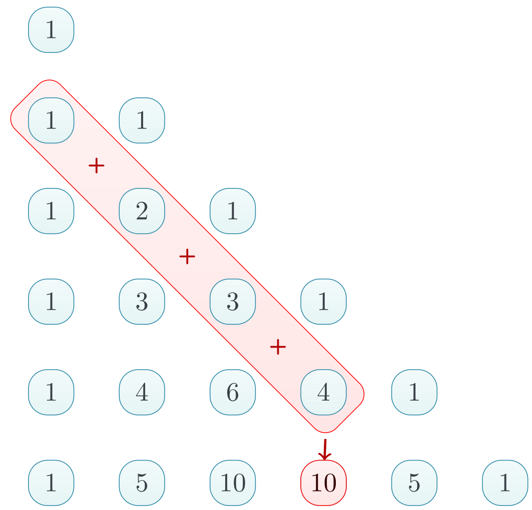

Figura 4: somas dos quatro primeiros elementos de uma diagonal do Triangulo de Pascal.

Exemplo 10. *Particularizando o Teorema das Diagonais para $n=1$ e $p=3$, obtemos $\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$. Os valores desses números binomiais são exibidos na Figura 4.*

De forma análoga ao Teorema das Colunas, o Teorema das Diagonais só pode ser aplicado diretamente se a soma for iniciada com um termo da coluna 0. Mas somas de outros termos consecutivos de uma diagonal também podem ser calculadas aplicando-se o teorema várias vezes. Vejamos um exemplo a seguir:

Exemplo 11. *Calcule o valor da soma*

$$\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{10}{8}.$$

Solução. Denotando por S a soma do enunciado, temos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{8}\binom{2+j}{j}-\sum_{j=0}^{2}\binom{2+j}{j} \\ &= \binom{11}{8}-\binom{5}{2}=155. \end{aligned}$$

$\square$

6 Equivalência entre os teoremas das colunas e das diagonais.

Apesar de termos exibido duas provas totalmente distintas uma da outra para os dois teoremas que nomeiam esta seção, olhando para os enunciados de cada um deles com cuidado pode-se perceber que eles são equivalentes. Realmente, para ver isto é suficiente lembrarmo-nos que, para quaisquer inteiros não negativos a e b, vale a igualdade

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

(veja o material teórico sobre Combinações, por exemplo). Os binomiais $\binom{a+b}{a}$ e $\binom{a+b}{b}$ são chamados de *complementares.*

A partir da igualdade acima, basta observar que, se trocarmos cada um dos números binomiais que aparecem na equação (2) do Teorema das Colunas por seus respectivos complementares, então o resultado obtido é precisamente a equação (4) do Teorema das Diagonais. De fato, cada termo do lado esquerdo de (2) é da forma $\binom{n+i}{n}$, onde $0 \le i \le p$, enquanto que cada termo do lado esquerdo de (4) é da forma $\binom{n+i}{i}$, onde $0 \le i \le p$; mas, como observamos acima,

$$\binom{n+i}{n} = \binom{n+i}{i}.$$

Pelo mesmo argumento, os valores que aparecem no lado direito de tais equações também são iguais:

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Dessa forma, temos que a equação (2) é satisfeita se, e somente se, a equação (4) também é satisfeita. Em outras palavras, poderíamos ter provado apenas o Teorema das Colunas, utilizando-o para concluir que o Teorema das Diagonais é verdade, ou vice-versa. É claro que, em todo caso, precisaríamos provar de forma independente pelo menos um deles.

7 Aplicações

Problema 12. *Dado $n \in \mathbb{N}$, encontre o valor da soma*

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Solução 1. Observe que $S(n)$ nada mais é do que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, em que tanto o primeiro termo quanto a razão são iguais a 1. Então, podemos simplesmente usar a fórmula para a soma dos termos de uma PA para obter $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Solução 2. Caso você ainda não tenha estudado progressões aritméticas, há uma outra forma de resolver esse problema. A ideia que usaremos aqui ilustra a técnica que será usada também nos problemas seguintes. Basta perceber que, para todo inteiro não negativo i, temos que $i = \binom{i}{1}$. Sendo assim,

$$S(n) = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{1}$$

e, pelo Teorema das Colunas, segue que

$$S(n) = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Problema 13. *Dado $n \in \mathbb{N}$, encontre o valor da soma*

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + (n-2)(n-1)n.$$

Solução. Veja que o termo geral de uma parcela dessa soma é igual a $(i-2)(i-1)i$, onde i varia de 3 a n. Como queremos obter uma soma de números binomiais, basta observar que

$$(i-2)(i-1)i = 3! \cdot \frac{(i-2)(i-1)i}{3!} = 3!\binom{i}{3}.$$

Sendo assim, e utilizando o Teorema das Colunas, obtemos

$$\begin{aligned} S &= 3!\binom{3}{3} + 3!\binom{4}{3} + \ldots + 3!\binom{n}{3} \\ &= 3!\left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots + \binom{n}{3}\right) \\ &= 3!\binom{n+1}{4} \\ &= 3!\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}. \end{aligned}$$

□

Problema 14. *Encontre o valor da soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, isto é, calcule*

$$Q(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Solução 1. Assim como no problema anterior, a ideia aqui é relacionar a soma pedida com uma soma de números binomiais.

O termo geral da soma $Q(n)$ é simplesmente i^2 onde i varia de 1 até n. Entretanto, veja que

$$i^2 = i(i+1) - i = 2 \cdot \binom{i+1}{2} - \binom{i}{1}.$$

Sendo assim, e utilizando duas vezes o Teorema das Colunas, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
Q(n) &= \left(2\binom{2}{2}-\binom{1}{1}\right)+\left(2\binom{3}{2}-\binom{2}{1}\right)+\dots\\
&\qquad \dots+\left(2\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}\right)\\
&= 2\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{n+1}{2}\right)+\\
&\qquad -\left(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\dots+\binom{n}{1}\right)\\
&= 2\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Por fim, podemos simplificar a expressão final obtida, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
Q(n) &= \frac{2\cdot(n+2)(n+1)n}{6}-\frac{(n+1)n}{2}\\
&= \frac{(n+1)n}{6}\Big(2(n+2)-3\Big)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

□

Solução 2. Outra bela maneira de resolver esse problema é começar desenvolvendo $(x+1)^3$ com o auxílio da fórmula para o Binômio de Newton, obtendo o conhecido *produto notável*

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1.$$

Em seguida, substituindo x sucessivamente por 1, 2, ..., n, obtemos:

$$\begin{aligned}
(1+1)^3 &= 1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\\
(2+1)^3 &= 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1\\
&\dots\\
(n+1)^3 &= n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1.
\end{aligned}$$

Agora, somando membro a membro todas as equações acima, observe que a maioria dos termos que estão elevados ao cubo irão se cancelar, restando a igualdade

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 = 1^3 &+ 3(1^2+2^2+\dots+n^2)\\
&+3(1+2+\dots+n)+\\
&+(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n}).
\end{aligned}$$

Assim, segue do resultado do Problema 12 que

$$(n+1)^3 = 1+3Q(n)+3\frac{n(n+1)}{2}+n.$$

Resolvendo a igualdade acima para $Q(n)$, iremos obter o mesmo valor encontrado na Solução 1. □

Problema 15. *Encontre o valor da soma dos cubos dos n primeiros inteiros positivos, isto é:*

$$T(n) = 1^3+2^3+\dots+n^3.$$

Prova. Como na Solução 1 do problema anterior, é possível escrever o termo geral dessa soma, que é igual a i^3, onde $1\le i\le n$, em função apenas de alguns números binomiais. Contudo, para reduzir a quantidade de cálculos, vamos usar os resultados que já obtivemos sobre $S(n)$ e $Q(n)$ nos problemas anteriores.

Observe primeiro que:

$$i^3 = i(i+1)(i+2)-3i^2-2i = 3!\binom{i+2}{3}-3i^2-2i.$$

Ao somar essas igualdades para i variando de 1 até n e reordenar as parcelas da igualdade assim obtida (do mesmo modo que fizemos na Solução 1 do Problema 14), obtemos

$$\begin{aligned}
T(n) &= 1^3+2^3+\dots+n^3\\
&= 3!\left(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\dots+\binom{n+2}{3}\right)+\\
&\quad -3\left(1^2+2^2+\dots+n^2\right)+\\
&\quad -2\left(1+2+\dots+n\right)\\
&= 6\binom{n+3}{4}-3Q(n)-2S(n).
\end{aligned} \tag{10}$$

Usando os resultados dos Problemas 12 e 14 e simplificando, obtemos que:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 6\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}+\\
&\quad -3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n(n+1)\left(\frac{(n+3)(n+2)}{4}-\frac{2n+1}{2}-1\right)\\
&= n(n+1)\left(\frac{n^2+5n+6-4n-2-4}{4}\right)\\
&= n(n+1)\frac{n(n+1)}{4}\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Observação 16. *Uma curiosidade interessante é que concluímos que $T(n)=S(n)^2$. Essa igualdade* não *se generaliza para a soma dos cubos de quaisquer números, mas não é uma coincidência; ela é um caso particular do* Teorema de Liouville*, que afirma que a soma dos cubos dos números de divisores positivos dos divisores positivos de um inteiro positivo m é igual ao quadrado da soma dos números de divisores positivos dos divisores positivos de m. (Para uma prova desse fato, veja o problema* 11 *do capítulo* 3 *da referência [1].)*

Em nosso caso, tomando $m = 2^{n-1}$, temos que m tem os divisores positivos $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, cujos números de divisores positivos são $1, 2, 3, \ldots, n$, respectivamente. Portanto, a soma dos cubos dos números de divisores positivos dos divisores positivos de m é $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, ao passo que o quadrado da soma dos números de divisores positivos dos divisores positivos de m é igual a $(1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Os dois problemas seguintes mostram outras somas interessantes envolvendo números binomiais, e serão deixados como exercícios para o leitor. Para o primeiro deles, convencionamos que $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$.

Problema 17. *Mostre que a seguinte identidade, conhecida como identidade de Euler ou de Vandermonde, é válida:*

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}.$$

Dica: Use um argumento combinatório. Mais precisamente, considere um conjunto $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}$ e conte, de duas maneiras diferentes, a quantidade de subconjuntos dele com p elementos. □

Problema 18. *Mostre que a seguinte identidade, conhecida como identidade de Lagrange, é válida:*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dica: Substitua alguns dos números binomiais por seus complementares e utilize o resultado do problema anterior. □

Dicas para o Professor

Caso os alunos já tenham estudado o Princípio da Indução Finita, uma outra forma bastante natural de provar o Teoremas das Colunas e o Teorema das Diagonais é usando indução sobre a quantidade de termos a serem somados. Neste caso, para provar que vale o passo indutivo basta usar a relação de Stifel. É interessante observar visualmente, no Triângulo de Pascal, a que corresponde esse passo indutivo. Essa visualização pode ser útil mesmo para alunos que não sejam fluentes em indução.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, 2ª edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.

3. R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik. *Matemática Concreta: Fundamentos para Ciência da Computação.* Editora LTC (1995).

4. J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. Murari. *Introdução à Análise Combinatória.* Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.