Material Teórico - Trigonometria III

Exercícios de funções trigonométricas I

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de novembro de 2022

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A função tangente

Na aula anterior, estudamos seno e cosseno como funções, com especial atenção para o fato de serem funções periódicas e para o traçado de seus gráficos. Nesta aula, apresentamos brevemente a função tangente e, em seguida, resolvemos alguns exercícios sobre funções trigonométricas.

Lembre-se de que a tangente de um ângulo pode ser definida como a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo, desde que seu cosseno seja diferente de zero. Também já estudamos, no módulo Círculo Trigonométrico, como visualizar o valor da tangente no eixo das tangentes. Vamos relembrar isso.

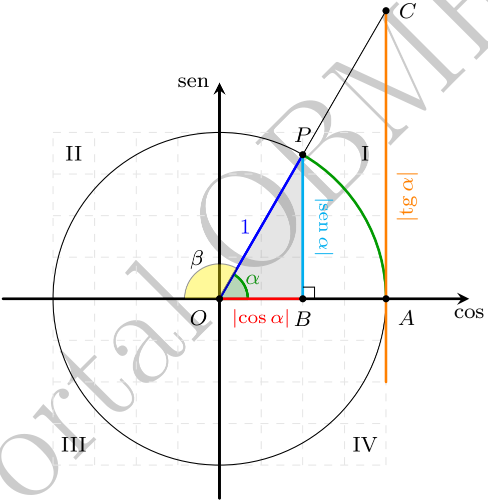


Figura 1: a reta AC é o *eixo das tangentes*.

Como na aula passada, considere $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e seja P um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico (ver figura 1). Vamos chamar de α a medida em radianos do ângulo $\angle AOP$. O eixo das tangentes é a reta vertical que passa por A. Veja que, como ela é perpendicular ao raio OA, ela é tangente ao círculo trigonométrico. Agora, seja C o ponto de intersecção da reta OA com o eixo das tangentes. Como já estudamos, temos que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ é igual ao valor absoluto de tangente de α, ou seja, $\overline{AC} = |\mathrm{tg}(\alpha)|$. Ademais, $\mathrm{tg}(\alpha)$ é positiva se C estiver acima do eixo-x e negativa se C estiver abaixo dele.

Observação 1. Para demonstrar o fato acima, defina B como o pé da perpendicular traçada de P ao eixo-x. Veja que $\overline{AO} = 1$, $\overline{BP} = |\mathrm{sen}\,\alpha|$ e $\overline{BO} = |\cos\alpha|$; em seguida, use o fato de que os triângulos OBP e OAC são semelhantes para deduzir que $\overline{AC} = |\mathrm{tg}\,\alpha|$. Por fim, observe se $\mathrm{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ é positivo ou negativo para cada possível quadrante de P a fim de comparar o sinal de $\mathrm{tg}(\alpha)$ com a posição de C.

1.1 Período da função tangente

Na aula passada, vimos que as funções seno e cosseno possuem período igual a 2π (quando os ângulos são medidos em radianos). Contudo, o período da função tangente é igual a π, conforme justificaremos abaixo.

Primeiramente, vamos demonstrar que, para todo x real, tem-se:

$$\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x).$$

Basta usar a fórmula para a tangente de uma soma de dois arcos para obter:

$$\mathrm{tg}(x+\pi) = \frac{\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(\pi)}{1 - \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{tg}(\pi)} = \frac{\mathrm{tg}(x) + 0}{1 - \mathrm{tg}(x)\cdot 0} = \mathrm{tg}(x).$$

Uma maneira alternativa é observar que, como $\mathrm{sen}(x+\pi) = -\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, tem-se

$$\mathrm{tg}(x+\pi) = \frac{\mathrm{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\mathrm{sen}(x)}{-\cos(x)} = \mathrm{tg}(x).$$

Por fim, é preciso argumentar que o período da função tangente não pode ser um número menor que π. Para isso, basta observar que, quando α varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$ (acompanhe na figura 1), o ponto P move-se ao longo do semicírculo direito do círculo trigonométrico e, por conseguinte, o ponto C sobe ao longo do eixo das tangentes. Dessa forma,

$$-\pi/2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi/2 \Rightarrow \text{tg}(\alpha_1) < \text{tg}(\alpha_2). \tag{1}$$

Agora, se o período p da função tangente fosse menor que π, poderíamos tomar um real $\alpha \in (-\pi/2,\pi/2)$ tal que $\alpha + p \in (-\pi/2,\pi/2)$. Mas aí, por um lado, teríamos $\text{tg}(\alpha+p) = \text{tg}(\alpha)$ (uma vez que p é o período) e, por outro, teríamos (fazendo $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + p$ em (1)) $\text{tg}(\alpha) < \text{tg}(\alpha + p)$.

O domínio e o gráfico da função tangente

Note que, quando $\alpha = \pi/2$, o valor de $\text{tg}(\alpha)$ não está definido. Isso segue tanto porque a reta que passa por $(0,0)$ e $(0,1)$ (este último ponto correspondendo a P quando $\alpha = \pi/2$) não intersecta o eixo das tangentes, quanto porque $\text{tg}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$ mas $\cos(\pi/2) = 0$, de sorte que não podemos realizar uma divisão por zero. De forma geral, sempre que $\cos(\alpha) = 0$, o valor de $\text{tg}(\alpha)$ não está definido. Isso acontece precisamente quando $\alpha = \pi/2 + k\pi$ onde k é um número inteiro: quando k é par, temos um arco congruente a $\pi/2$; quando k é ímpar, temos um arco congruente a $3\pi/2$.

Assim, o domínio da função tangente não pode conter qualquer número da forma $\pi/2 + k\pi$ onde k é um número inteiro. Mas, para qualquer outro número real x, o valor de tangente de x está definido. Dessa forma, o domínio da função tangente é definido como o conjunto dos reais que não são da forma $\pi/2 + k\pi$, onde k é um número inteiro.

Agora, vamos desenhar o gráfico da função $\text{tg}(x)$ (veja a Figura 2). Para cada número real x, consideremos o ponto P em que $\alpha = x$ e observemos o que acontece com o ponto C, sobre o eixo das tangentes, quando variamos x. Comece com x sendo um número negativo, um pouco maior que $-\pi/2$ (veja que, quando $x = -\pi/2$, o valor de $\text{tg}(x)$ não está definido). Nesse caso, o ponto C estará muito abaixo de A, de modo que $\text{tg}(x)$ será um número negativo de grande valor absoluto. À medida que x aumenta, variando de $-\pi/2$ até $\pi/2$, o valor de $\text{tg}(x)$ só aumenta, passando por 0 quando

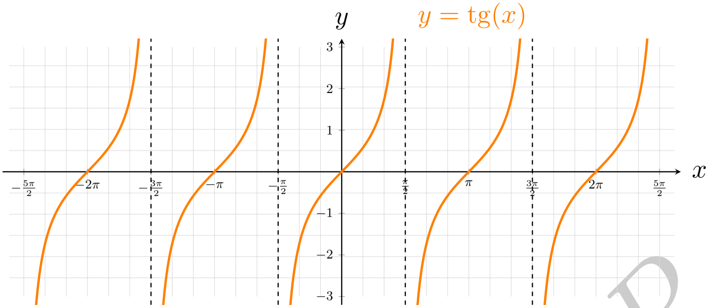


Figura 2: gráfico da tangente no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$.

$x = 0$ e crescendo indefinidamente quando x se aproxima de $\pi/2$. Porém, quando $x = \pi/2$ o valor de $\operatorname{tg}(x)$ novamente não está definido. Repentinamente, para x um pouco maior que $\pi/2$, o valor de $\operatorname{tg}(x)$ volta a ser negativo e grande em módulo, e o processo se repete, sempre em intervalos de comprimento π. Veja ainda que, quanto mais próximo de $\pi/2$ e de $-\pi/2$ o real x estiver, pequenas variações em x causarão grandes mudanças na posição de C. Por outro lado, quando x estiver próximo de 0, a posição de C variará pouco. Daí, o formato do gráfico da tangente.

Observação 2. Uma justificativa rigorosa para o fato do gráfico da função tangente ser *emborcado para cima* no intervalo $(0,\pi/2)$ e *emborcado para baixo* no intervalo $(-\pi/2,0)$ está além do que pretendemos nestas notas. Para o leitor interessado, sugerimos a referência [2].

2 Execícios sobre funções trigonométricas

Nesta seção, resolvemos exercícios que envolvem funções trigonométricas em geral.

Exemplo 3 (UEPB). *Sendo* $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, *o valor de* $f\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$ *é:*

(a) $\sqrt{2}$.

(b) 2.

(c) $-\sqrt{2}$.

(d) -1.

(e) $\sqrt{2}/2$.

Solução. Podemos calcular, por substituição direta, que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-7\pi}{4}\right) &= -4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{-7\pi}{4}\right)\right)+2\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) \\ &= -4\cos\left(\frac{2\pi+7\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) \\ &= -4\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)+2\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Agora, para terminar, precisamos calcular a menor denominação positiva dos arcos $9\pi/4$ e $-7\pi/4$. Subtraindo 2π (ou seja, um volta) de $9\pi/4$, obtemos o arco equivalente: $\frac{9\pi}{4}-2\pi=\frac{\pi}{4}$; por outro lado, somando 2π a $-7\pi/4$ obtemos o arco equivalente $\frac{-7\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi}{4}$. Logo,

$$\cos(9\pi/4)=\cos(-7\pi/4)=\cos(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de sorte que

$$f\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=-4\frac{\sqrt{2}}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}.$$

$\square$

Exemplo 4 (ENEM). *Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por* $y = a\,\mathrm{sen}(b(x+c))$, *tal que os parâmetros* a, b *e* c *são positivos. O programa permite* *ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. Quais são (ou qual é) o(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s)?*

Solução. Observamos que o inverso do período de uma onda é sua *frequência*; assim, a frequência aumenta à medida que o período diminui, e vice-versa.

Recorde, da aula anterior, que a variável "a" representa a *amplitude* do gráfico, ou seja, a altura da onda; portanto, ela não afeta a frequência da onda.

A expressão $b(x+c)$ pode ser reescrita como $bx+bc$. Se mudarmos o valor de c, isso afetará apenas o termo independente de x, o qual representa a *fase* da onda. Assim, modificando apenas c, simplesmente moveremos a onda horizontalmente, mas também não alteraremos sua frequência.

Por fim, o parâmetro b, que multiplica a variável x, é justamente o que altera a frequência. O período é dado por $2\pi/b$, logo, a frequência é $b/(2\pi)$. Como b é positivo, quanto maior b, maior será a frequência, tornando, assim, o som mais agudo. $\square$

Exemplo 5 (PUC/SP). *Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que, no ano $2015 + x$, com $x \in \{0,1, 2, \ldots, 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações em certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:*

(a) *O valor máximo ocorrerá apenas em* 2021.

(b) *Atingirá o valor mínimo apenas em duas ocasiões.*

(c) *Poderá superar* 300 *milhões de dólares.*

(d) *Nunca será inferior a* 250 *milhões de dólares.*

Solução. Observando a fórmula da função, veja que $f(x)$ é máximo quando $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ for máximo e $f(x)$ é mínimo quando

$\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ for mínimo. Como o cosseno de qualquer arco é no mínimo -1 e no máximo 1, temos que

$$250 - 12 \leq f(x) \leq 250 + 12,$$

ou seja,

$$238 \leq f(x) \leq 262.$$

Mas, cuidado! De acordo com o enunciado, x não pode ser um real qualquer; ele está restrito aos inteiros $0,1,2,\ldots,10$. Assim, precisamos verificar se os valores 238 e 262 realmente podem ser alcançados.

Para que $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1$, precisamos que $\frac{\pi}{3}x = 2k\pi$, para algum k inteiro. Ou seja, $x = 6k$ onde k é inteiro. Como $0 \leq x \leq 10$, temos $0 \leq 6k \leq 10$, e segue que há exatamente duas soluções, $k = 0$ e $k = 1$, as quais resultam em $x = 0$ e $x = 6$. Para esses dois valores de x, temos $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1$ e, portanto, $f(x) = 262$. Como $f(x)$ é o valor da arrecadação no ano $2015 + x$, o valor de 262 milhões de dólares é arrecadado nos anos 2015 e 2021.

Para o valor mínimo arrecadado no período, observe que $\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = -1$ quando $\frac{\pi}{3}x = (2k+1)\pi$ para algum k inteiro. Isso equivale a $x = 6k + 3$ e, como $0 \leq x \leq 10$, novamente há exatamente duas soluções, $k = 0$ e $k = 1$. Por sua vez, tais valores correspondem a $x = 3$ e $x = 9$, logo, aos anos 2018 e 2024.

Assim, a alternativa (b) é a única correta. $\square$

Exemplo 6 (Escola Naval, adaptada). *Sejam A e B dois conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio mais amplo possível da função*

$$f(x) = \sqrt{\frac{-1 + 2\operatorname{sen} x}{1 + 2\operatorname{sen} x}}$$

no universo $[0,2\pi]$ e o conjunto-solução da inequação

$$\frac{1}{\csc x} - \frac{1}{\sec x} > 0,$$

para $0 < x < \pi$, com $x \neq \frac{\pi}{2}$. Encontre o conjunto dos números que estão em B mas não em A.

Solução. Para que a função $f(x)$ esteja bem definida, precisamos que o radicando seja não negativo ou seja, que

$$\frac{-1+2\,\text{sen}\,x}{1+2\,\text{sen}\,x} \geq 0.$$

Para simplificar, operemos a substituição de variáveis $y = \text{sen}\,x$ e façamos o estudo do sinal da expressão:

$$\frac{-1+2y}{1+2y} \geq 0,$$

conforme estudamos no módulo "Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau" do Primeiro ano do Ensino Médio.

		$-1/2$		$1/2$	x
$-1+2y$	$-$		$-$	0	$+$
$1+2y$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{-1+2y}{1+2y}$	$+$		$-$	0	$+$

Assim, precisamos que $y \geq 1/2$ ou $y < -1/2$. Voltando à variável x, queremos que

$$\text{sen}\,x \geq 1/2 \quad \text{ou} \quad \text{sen}\,x < -1/2.$$

(Observe que em uma das desigualdades temos o sinal de "estritamente menor" e na outra o sinal de "maior ou igual").

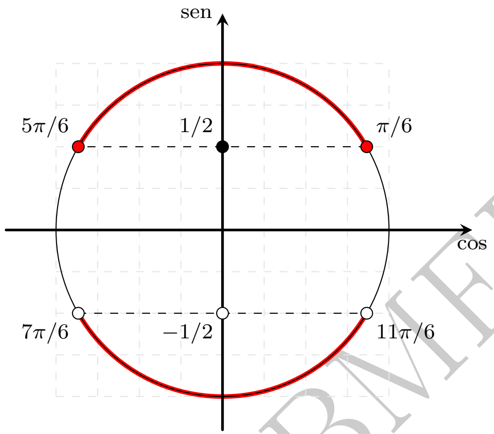
A seguir, marcamos sobre o círculo trigonométrico os possíveis valores de x, no universo $[0{,}2\pi]$, que satisfazem as restrições acima (acompanhe na próxima figura):

- Uma vez que, para x em $[0{,}2\pi]$, temos $\text{sen}\,x = 1/2$ se, e somente se, $x = \pi/6$ ou $x = 5\pi/6$, concluímos que $\text{sen}\,x \geq 1/2$ se, e somente se, $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$.

- Da mesma forma, como, para x em $[0{,}2\pi]$, temos $\text{sen}\,x = -1/2$ se, e somente se, $x = 7\pi/6$ ou $x = 11\pi/6$, concluímos que $\text{sen}\,x < -1/2$ se, e somente se, $7\pi/6 < x < 11\pi/6$.

Assim,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \pi/6 \leq x \leq 5\pi/6 \text{ ou } 7\pi/6 < x < 11\pi/6\}.$$



Resta descrever o conjunto B, ou seja, resolver a inequação $\frac{1}{\csc x} - \frac{1}{\sec x} > 0$, com a condição adicional de que $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$. Substituindo $\csc x = 1/\operatorname{sen} x$ e $\sec x = 1/\cos x$, vemos que a inequação é equivalente a

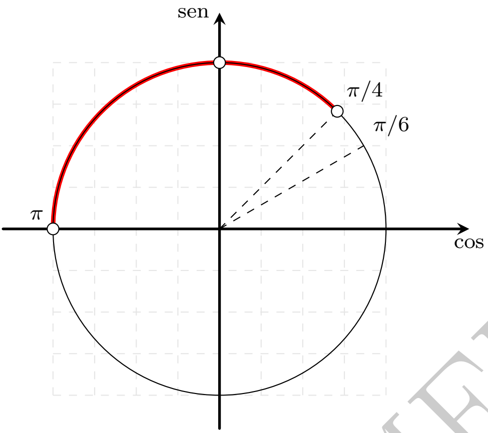
$$\operatorname{sen}(x) - \cos(x) > 0.$$

No domínio de 0 a π, isso ocorre precisamente quando $\pi/4 < x < \pi$. Na próxima figura, marcamos esse intervalo no círculo trigonométrico, excluindo o ponto $\pi/2$ (conforme instruído pelo enunciado, pois $1/\sec x$ não tem sentido para tal valor de x, uma vez que $\sec x = 0$ para $x = \pi/2$). Logo,

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \pi/4 < x < \pi/2 \text{ ou } \pi/2 < x < \pi\}.$$

Por fim, podemos verificar quais números estão em B que não estão em A, comparando as duas figuras. São os reais x tais que

$$\frac{5\pi}{6} < x < \pi.$$



□

Dicas para o Professor

Nesta aula, mostramos como construir o gráfico da função tangente. É importante que os alunos estejam confortáveis com o conteúdo da aula anterior e, em especial, estejam habituados a usar medidas de arcos em radianos. Outro pré-requisito geral desta aula é ter boa familiaridade com o sistema cartesiano e saber (genericamente) esboçar e interpretar gráficos de funções.

As vídeo-aulas "Aula de exercícios 3" e "Aula de exercícios 4" deste módulo trazem outros exercícios. As referências colecionadas abaixo contém mais sobre *funções trigonométricas*.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2022.

3. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.