Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 2

Limites Infinitos

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de janeiro de 2021

Neste material, vamos expandir o conceito de limite, tratando do conceito de *limites infinitos*. Em seguida, veremos como ele pode ser utilizado para ajudar a construir vários gráficos de funções. A definição relevante é como segue.

Definição 1. *Dados um intervalo I, um ponto $x_0 \in I$ e uma função $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, escrevemos*

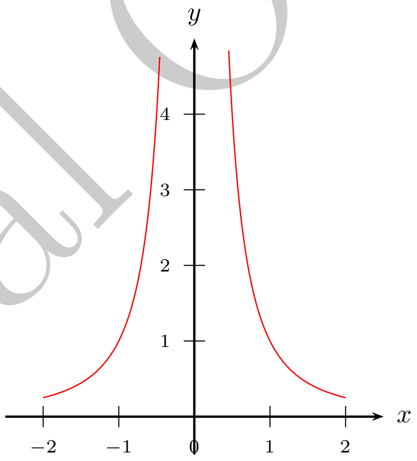
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \tag{1}$$

se, para $M > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ (dependente de M) tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Observe que, em palavras, (1) significa que, tomando x suficientemente próximo (mas diferente) de x_0, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto se queira. Vejamos um

Exemplo 2. A figura a seguir esboça o gráfico da função $f : (-2,2) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$:



Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$\frac{1}{x^2} > 10000 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{10000} = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{100}.$$

Assim,

$$x \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 10000.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{x^2} > 1000000 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{1000000} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{1000},$$

de sorte que

$$x \in \left(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}\right) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 1000000.$$

Em ambos as as situações acima, conseguimos tornar $\frac{1}{x^2}$ muito grande (maior que 10000 no primeiro caso e maior que 1000000 no segundo), bastando tomar x suficientemente próximo (mas diferente) de 0.

Podemos raciocinar da mesma forma se tomarmos um $M > 0$ arbitrário e impusermos que se deva ter

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} > M.$$

Realmente, como $M = \sqrt{M}^2$, temos

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} = \left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Portanto,

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M.$$

Os cálculos acima mostram que, nas notações da definição anterior, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Observe que o $\delta > 0$ correspondente à exigência de que $\frac{1}{x^2} > M$ dependeu do valor de M: precisamos tomar $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$ quando $M = 10000$, $0 < \delta \leq \frac{1}{1000}$ quando $M = 1000000$ e, mais geralmente, $0 < \delta \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$ para um $M > 0$ qualquer.

De maneira análoga à definição anterior, dados um intervalo I, um ponto $x_0 \in I$ e uma função $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

se, para $M > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ (dependente de M) tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Assim, é de se esperar (e você pode verificar, seguindo os passos do exemplo anterior) que

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty$$

significa que, para $M > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ (novamente dependente de M) tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Também,

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$$

significa que, para $M > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ (novamente dependente de M) tal que

$$x \in I \text{ e } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

e

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$$

significa que, para $M > 0$ dado arbitrariamente, existir $\delta > 0$ (novamente dependente de M) tal que

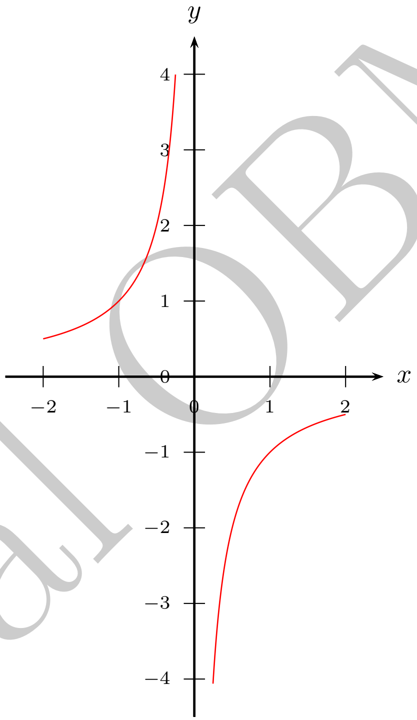
$$x \in I \text{ e } -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) > M.$$

Deixamos para você a tarefa de escrever uma sentença que defina adequadamente os conceito

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty.$$

De todo modo, o próximo exemplo ilustra algumas das situações acima.

Exemplo 3. A figura a seguir esboça o gráfico dda função $f : (-2,2) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -\frac{1}{x}$:



A partir dela, é razoável pensarmos que

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty.$$

Realmente, dado $M > 0$, temos para $x < 0$ que

$$-\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow \frac{1}{-x} > M \Leftrightarrow -x < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{M}.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{1}{M}$, temos que

$$-\delta < x - 0 < 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} > M,$$

logo, $\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty$.

Da mesma forma, dado $M > 0$, temos para $x > 0$ que

$$-\frac{1}{x} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > M \Leftrightarrow x < \frac{1}{M}.$$

Portanto, tomando $\delta = \frac{1}{M}$, temos que

$$0 < x - 0 < \delta \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} < -M,$$

logo, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$.

Vejamos, agora, um exemplo um pouco mais elaborado.

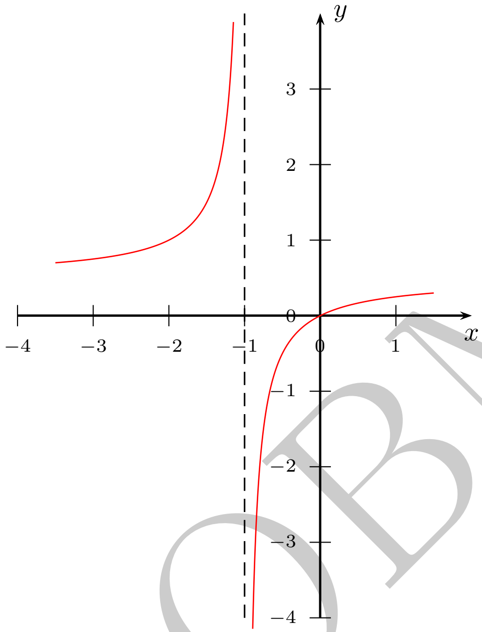
Exemplo 4. Observe, a tabela a seguir, na qual calculamos, para alguns valores $x \neq -1$, os valores correspondentes de $f(x) = \frac{x}{2(x+1)}$:

x	$f(x)$
-2	1
$-1{,}5$	$1{,}5$
$-1{,}1$	$5{,}5$
$-1{,}01$	$50{,}5$
0	0
$-0{,}5$	$-0{,}5$
$-0{,}9$	$-4{,}5$
$-0{,}99$	$-47{,}5$

Os valores calculados acima parecem sugerir que

$$\lim_{x \to (-1)-} \frac{x}{2(x+1)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (-1)+} \frac{x}{2(x+1)} = -\infty.$$

A suspeita em relação a tal comportamento da função $f(x)$ é ainda mais reforçada se esboçarmos seu gráfico, conforme mostrado na próxima figura:



A fim de verificar rigorosamente a validade dos limites acima, começamos observando que, a fim de analisar a existência de limites quando $x \to -1$, basta nos restringirmos a fazer x variar no intervalo $(-2,0)$ (sendo, é claro, $x \neq -1$). Também,

$$x < -1 \Rightarrow x, x+1 < 0 \Rightarrow \frac{x}{2(x+1)} > 0$$

e

$$-1 < x < 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ e } x < 0 \Rightarrow \frac{x}{2(x+1)} < 0.$$

Agora, escrevemos

$$f(x) = \frac{x}{2(x+1)} = \frac{(x+1)-1}{2(x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Em seguida, dado $M > \frac{1}{2}$, temos para $x < -1$ que

$$\begin{aligned} f(x) > M &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x+1)} > M \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2(x+1)} < \frac{1}{2} - M \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{-2(x+1)} > M - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x + 1 > -\frac{1}{2M-1} \\ &\Leftrightarrow x - (-1) > -\frac{1}{2M-1} \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\delta = \frac{1}{2M-1}$, temos que

$$-\delta < x - (-1) < 0 \Rightarrow f(x) > M,$$

logo, $\lim_{x \to (-1)-} f(x) = +\infty$.

Deixamos para você a tarefa de adaptar o argumento acima para mostrar que $\lim_{x \to (-1)+} f(x) = -\infty$.

Nos exemplos anteriores, utilizamos *softwares* para esboçar os gráficos das funções de que tratamos. Contudo, se não dispuséssemos de tais ferramentas mas já tivéssemos certa familiaridade com limites infinitos, poderíamos utilizá-los para auxiliar na construção (manual) do gráfico de certas funções.

Para entender como fazer isso, consideremos a função $f : [0, +\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Evidentemente, temos $f(x) > 0$ para todo $0 \leq x \neq 1$. Também, dado $M > 0$, temos

$$\begin{aligned} f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} > M &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2} < \frac{1}{M} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M^3} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M^3}}. \end{aligned}$$

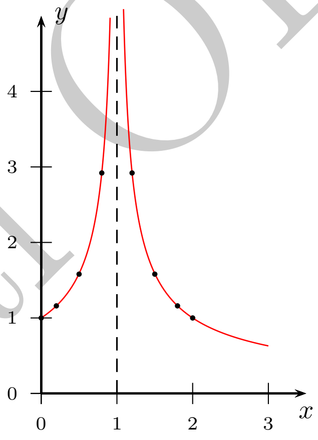
Portanto, tomando $\delta = \frac{1}{\sqrt{M^3}}$, temos que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

logo, $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

O que essa informação diz sobre o gráfico de f? Quando $x \neq 1$ se aproxima de 1 (mantendo-se diferente de 1), o ponto $(x,f(x))$ sobre o gráfico de f se aproxima da reta $x = 1$ (sem, no entanto, nunca tocá-la, uma vez que 1 não pertence ao domínio da função). Além disso, o ponto $(x,f(x))$, que seja $x < 1$ ou $x > 1$, *sobe mais e mais*, uma vez que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Essa informação *qualitativa*, juntamente com a marcação de alguns pontos específicos $(x,f(x))$ sobre o gráfico, permitem esboçá-lo com alguma precisão, o que pode ser útil para vários fins. A próxima figura faz isso, com o auxílio dos valores mostrados na tabela seguinte



x	$f(x)$
0 e 2	1
0,2 e 1,8	$\frac{\sqrt[3]{100}}{4} \cong 1{,}16$
0,5 e 1,5	$\sqrt[3]{4} \cong 1{,}58$
0,8 e 1,2	$\sqrt[3]{25} \cong 2{,}92$

A discussão acima motiva a seguinte

Definição 5. *Sejam dados um intervalo I, um ponto $x_0 \in I$ e uma função $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$$

(*para uma escolha qualquer de sinais* $+$ *ou* $-$), *dizemos que a reta $x = x_0$ é uma **assíntota vertical** para o gráfico de f.*

Exemplo 6. A fim de encontrar as assíntotas verticais do gráfico de $f : \mathbb{R} \setminus \{1{,}3\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3},$$

começamos observando que

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}.$$

Nesse ponto, você pode verificar sem dificuldade (faça isso!) que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

e

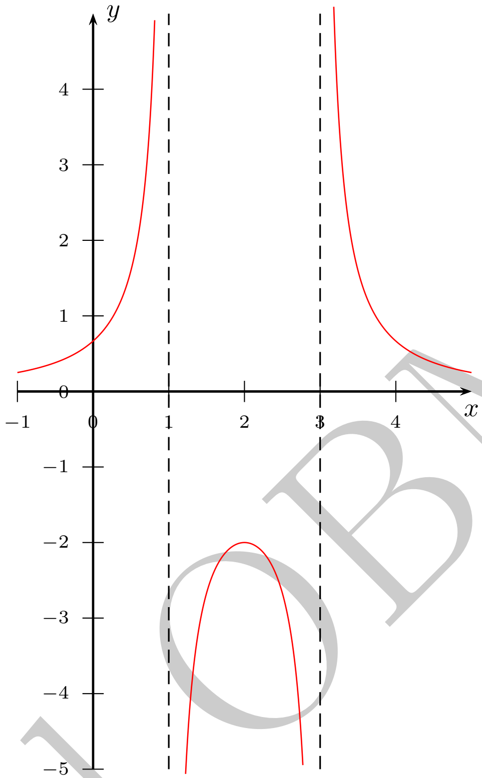
$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 3-} \frac{1}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

Também, para $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \neq 1{,}3$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x_0 - 1}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x_0 - 3}.$$

A partir daí, fica claro que as retas $x = 1$ e $x = 3$ são as únicas assíntotas verticais do gráfico de f.

A figura a seguir esboça tal gráfico, o qual reforça as informações acima:



Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em dois encontros de 50 minutos cada.

No primeiro encontro, aborde o conceito de limite infinito e discuta os três primeiros exemplos apresentados no texto. Uma estratégia interessante nesse sentido é primeiro obter (com o auxílio de uma calculadora) alguns valores $f(x)$ para x próximo a x_0 e, em seguida, usá-los para esboçar o gráfico de f; após essa etapa, peça aos alunos que, a partir dos valores calculados e do esboço do gráfico, opinem sobre se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe e, caso exista, se é $+\infty$ ou $-\infty$.

No segundo encontro, discuta os dois últimos exemplos e, a partir deles, defina o conceito de assíntota vertical de um gráfico. A essa altura, os alunos já deverão ter percebido, intuitivamente, que o gráfico se aproxima mais e mais da reta $x = x_0$, de sorte que o conceito lhes parecerá natural.

Mais exercícios relacionados a limites finitos e infinitos, laterais ou bilaterais, podem ser encontrados nas sugestões de leitura complementar a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo.* Coleção Profmat. Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, São Paulo, 2014.