Material Teórico - Módulo Matrizes e Sistemas Lineares

Sistemas Lineares - Parte 1

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

O tema "Sistema de Equações Lineares" já foi abordado em módulos desde o sétimo ano do ensino fundamental. Veja, por exemplo, o módulo "O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações" do sétimo ano e o módulo "Sistemas de Equações do 1o Grau" do oitavo ano. Contudo, o foco principal destas aulas iniciais era apenas na resolução de sistemas lineares com duas variáveis. Alguns exemplos com mais de duas variáveis foram apresentados, mas não foi apresentado um método de resolução geral.

Nesta aula, começaremos revisando alguns desses tópicos já tratados, centrando nossa atenção em sistemas lineares com duas ou três variáveis (essa parte é feita em detalhes também na referência [1]). Além disso, introduzimos a nomenclatura geral, a classificação de sistemas lineares e o método da *eliminação gaussiana* (também chamado de *escalonamento*). Na aula seguinte (Parte 2), veremos como representar um sistema linear usando matrizes, aplicaremos o método da eliminação gaussiana a sistemas com mais de três variáveis e faremos mais exercícios.

Apesar de o método que apresentaremos ser geral, ele é apenas um dentre vários métodos existentes para resolver sistemas lineares. Outro método, mais profundo, o qual utiliza o conceito de determinantes de matrizes, pode ser encontrado na referência [2]. Sendo assim, o que apresentaremos aqui ainda é uma introdução bem sucinta ao estudo de sistemas lineares. Um tratamento mais aprofundado costuma ser feito em disciplinas do primeiro ano do Ensino Superior, em disciplinas de Álgebra Linear.

2 Equações lineares

Lembremos primeiro o que são equações lineares. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b números (reais) conhecidos, e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ incógnitas.

> Uma equação linear é uma equação do tipo
>
> $$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \qquad (1)$$
>
> Neste contexto, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados de *coeficientes*, b é chamado de *termo independente* e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são chamados de *variáveis*.

Note que o nome "equação linear" faz alusão a uma reta. Em verdade, conforme já estudamos anteriormente, quando temos apenas duas variáveis ($n = 2$) o conjunto dos pontos (x_1, x_2) que satisfazem a equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ realmente representa uma reta no plano cartesiano x_1Ox_2. Para três variáveis, é possível mostrar que o conjunto-solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ corresponde a um plano no espaço. Para um número maior de variáveis, há também uma representação *geométrica*, correspondente ao que chamamos de *hiperplano*. Para duas e três variáveis, esse estudo geométrico de equações e sistemas lineares será feito com detalhes no módulo seguinte ("Sistemas Lineares e Geometria Analítica").

Os dois exemplos a seguir colecionam alguns exemplos de equações, lineares e não-lineares.

Exemplo 1. *A expressão*

$$4x - 3y = 12$$

é uma equação linear com duas variáveis, x e y, com coeficientes 4 e -3, respectivamente, e com termo independente 12. A expressão

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18$$

é uma equação linear com três variáveis, x_1, x_2 e x_3, com coeficientes 2, -3 e 5, respectivamente, e com termo independente 18.

A expressão

$$x + 3 = 2(y - 1)$$

também é uma equação linear, mas precisamos reorganizar os seus termos (sem alterar o conjunto de suas soluções) para deixá-la no formato equivalente,

$$x - 2y = -5,$$

ao das demais equações.

Observe que, no lado esquerdo da equação (1), temos uma soma na qual cada parcela contém apenas uma variável, que possui expoente 1 e é multiplicada somente por seu coeficiente, ao passo que do lado direito temos apenas o termo independente.

Exemplo 2. *As equações a seguir* não *são equações lineares:*

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= 12, \\ x^{-1} + 3y - 5z &= 10, \\ x_1 + x_2^{1/2} &= 8, \\ x + y + xy &= 10, \\ \operatorname{sen}(x) + y &= 1. \end{aligned}$$

Prosseguimos recordando que uma *solução* de uma equação é uma atribuição de valores às suas variáveis que torne a equação uma igualdade verdadeira.

Exemplo 3. *A equação $4x - 3y = 12$ possui infinitas soluções. De fato, toda equação linear com pelo menos duas variáveis com coeficientes não nulos possui infinitas soluções. Por exemplo, se a equação possui n variáveis com coeficientes não nulos ($n > 1$) então, para qualquer escolha de valores para $n - 1$ delas, existe um valor para a variável restante satisfazendo a equação. Em nosso exemplo, quando $x = 0$ temos $-3y = 12$, o que implica $y = -4$. Sendo assim, $(x, y) = (0, -4)$ é uma solução da equação.*

Por outro lado, para $x = 1$ temos $4 - 3y = 12$, logo $y = -8/3$; assim, $(1, -8/3)$ é outra solução. Para $y = 5$, temos $4x - 15 = 12$, de sorte que $x = 27/4$; então, $(27/4, 5)$ é uma terceira solução. Veja que dizer que há infinitas solução não significa dizer que todo par ordenado seja uma solução. Por exemplo, o par ordenado $(2, 1)$ não é uma solução de $4x - 3y = 12$, já que $4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5 \neq 12$.

De modo geral, para que o par (x_0, y_0) seja solução de nossa equação, devemos ter

$$4x_0 - 3y_0 = 12$$

e, portanto, $y_0 = (4x_0 - 12)/3 = 4x_0/3 - 4$. Sendo assim, podemos dizer que o cojunto-solução é o conjunto dos pares da forma $\left(x_0, \frac{4x_0}{3} - 4\right)$, com $x_0 \in \mathbb{R}$. Note ainda que x_0 é qualquer número real, ou seja, não é necessário que x_0 seja inteiro, ou mesmo racional.

Voltando à discussão de equações lineares gerais, há dois casos que merecem atenção particular. Primeiramente, se todos os coeficientes da equação forem nulos e o termo independente for diferente de zero, ou seja, se a equação linear tiver a forma

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b,$$

com $b \neq 0$, então a equação não possui soluções. Por outro lado, quando todos os coeficientes forem nulos e o termo independente também for nulo, ou seja, quando a equação tiver a forma

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0,$$

então qualquer atribuição de valores às variáveis será uma solução.

3 Sistemas lineares

Dadas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, um sistema linear (sobre estas variáveis) é um sistema onde cada equação é uma equação linear (sobre as mesmas variáveis). Se o sistema possui m equações, então, para cada índice i de 1 a m, vamos representar por b_i o termo independente da $i-$ésima equação, e por $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ os coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, nesta mesma equação. Note que alguns dos coeficientes das equações (isto é, alguns dos números reais a_{ij}), podem ser nulos. Assim, o sistema linear possui a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{2}$$

Uma *solução* de um sistema linear como acima é uma atribuição de valores às variáveis para a qual *todas* as equações do sistema sejam satisfeitas (quer dizer, tornem-se igualdades verdadeiras). Por sua vez, o *conjunto-solução* do sistema é justamente o conjunto de todas as soluções do sistema.

Representamos uma solução $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ do sistema linear acima pela $n-$*upla*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n);$$

assim, o número que ocupa a $i-$ésima posição (da esquerda para a direita) na $n-$upla acima corresponde ao valor da $i-$ésima variável x_i na solução.

Denotando por $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (o produto cartesiano de n fatores $\mathbb{R}$) o conjunto formado por todas as n-uplas de números reais, podemos dizer que o conjunto-solução do sistema linear (2) é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Dois sistemas lineares são *equivalentes* se possuírem o mesmo conjunto de variáveis e os mesmos conjuntos-solução.

3.1 Classificação de sistemas lineares

Em relação ao número de soluções, um sistema linear pode ser classificado em um dos seguintes tipos.

1. *Possível*: quando seu conjunto-solução é não vazio, ou seja, quando existe pelo menos uma solução. Dentre os sistemas possíveis, há dois tipos distintos:
   (a) *Determinado*: quando existe apenas uma solução.
   (b) *Indeterminado*: quando existe mais de uma solução.
2. *Impossível*: quando seu conjunto-solução é vazio.

É óbvio que exatamente um dos casos acima deve acontecer. Contudo, uma observação interessante é que sempre que um sistema linear possui mais do que uma solução, ele possuirá infinitas soluções.

Para demostrar este fato, suponhamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sejam soluções distintas do sistema linear (2). Podemos verificar facilmente que, para qualquer número real t, a $n-$upla $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, com $\gamma_j = t\alpha_j + (1-t)\beta_j$ para $1 \leq j \leq n$, também é uma solução. De fato, basta verificar que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ satisfaz cada uma das equações de (2).

Para cada índice i tal que $1 \leq i \leq m$, vamos olhar para a i-ésima equação do sistema, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$. Já sabemos que

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \;\text{ e }\; a_{i1}\beta_1 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i.$$

Multiplicando-se a primeira equação por t e a segunda por $1-t$, obtemos:

$$ta_{i1}\alpha_1 + \cdots + ta_{in}\alpha_n = tb_i$$

e

$$(1-t)a_{i1}\beta_1 + \cdots + (1-t)a_{in}\beta_n = (1-t)b_i.$$

Somando membro a membro as duas equações acima, obtemos

$$a_{i1}(t\alpha_1+(1-t)\beta_1)+\cdots+a_{in}(t\alpha_n+(1-t)\beta_n) = (t+1-t)b_i$$

ou, o que é o mesmo,

$$a_{i1}\gamma_1 + \cdots + a_{i1}\gamma_n = b_i.$$

Como isso vale para todo índice i tal que $1 \leq i \leq m$, concluímos que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ também é solução do sistema. Agora, como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, existe pelo menos um índice j, com $1 \leq j \leq n$, tal que $\alpha_j \neq \beta_j$. Sendo esse o caso, é imediato que o número $t\alpha_j+(1-t)\beta_j$ pode assumir qualquer valor real desejado, bastando escolhermos um valor conveniente para t. Portanto, a fórmula que define $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ em termos de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ gera uma infinidade de soluções para o sistema linear (2).

Por outro lado, dependendo do sistema linear, além das infinitas soluções que geramos acima (a partir de duas soluções conhecidas), podem ainda existir outras que não são do tipo $\gamma_j = t\alpha_j + (1-t)\beta_j$ para todo índice j de 1 a n.

Observação 4. *É possível demonstrar que se o número m de equações em um sistema* linear *for maior do que o número n de variáveis, ou seja, $m > n$, então pelo menos uma dessas equações é redundante e pode ser removida do sistema sem alterar seu conjunto-solução. Isso* não *quer dizer que possamos remover qualquer uma das equações; apenas quer dizer que existe uma delas que pode ser removida. Dessa forma, para simplificar as análises do restante desse módulo, vamos considerar aqui apenas sistemas em que o número de equações é menor ou igual ao de variáveis ($m \leq n$).*

4 Sistemas com duas variáveis

Conforme observamos no início desta aula, em módulos anteriores foram apresentados alguns métodos para resolver sistemas lineares (em especial, o "método da substituição" e o "método da adição"). Dependendo do sistema linear, pode ser mais simples aplicar um ou outro (ou um terceiro) desses métodos.

Neste módulo, centraremos nossa atenção apenas no chamado "*método da eliminação*". A ideia geral dele é reduzir o número de variáveis em algumas das equações, a fim de obter um sistema equivalente ao inicial, mas mais simples de ser resolvido. Em sistemas lineares com duas variáveis, ele é essencialmente igual ao método da adição. A vantagem desse método é que, ao generalizá-lo para sistemas com um número maior de variáveis, ele ainda continua bastante prático de ser aplicado.

Como vimos no Exemplo 3, se nosso sistema linear de duas variáveis tiver apenas uma equação (e esta com pelo menos um coeficiente não nulo), então ele será possível e indeterminado (possuirá infinitas soluções). Assim, pela Observação 4, vamos considerar agora apenas o caso em que temos duas variáveis e duas equações.

Os três exemplos a seguir ilustram, para o caso de duas equaçõs e duas variáveis, tanto a ideia central do método de eliminação quanto as possibilidades distintas para o conjunto-solução de um sistema linear.

Exemplo 5. *Resolva o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 3x + 12y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}.$$

Solução. O objetivo é eliminar a variável x da segunda equação. Para isso, vamos primeiro simplificar a primeira equação, de modo que o coeficiente de x nela passe a ser igual a 1: basta dividir ambos os lados da equação por 3. Obtemos, assim, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + 4y = 5/3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}.$$

Agora, basta multiplicar a primeira equação por 2 (que é o coeficiente de x na segunda equação) e subtrair o resultado da segunda equação. Operando dessa forma, obtemos a equação:

$$2x + 3y - 2(x + 4y) = 7 - 2 \cdot (5/3).$$

Cancelando as termos em que x aparece e simplificando, obtemos

$$-5y = 11/3.$$

Esse equação irá substituir a segunda equação do nosso sistema original, que se transformará em:

$$\begin{cases} x + 4y = 5/3 \\ \quad -5y = 11/3 \end{cases}.$$

Uma vez feito isso, podemos resolver as equações do último sistema linear *de baixo para cima*, obtendo o valor de cada variável. Primeiramente, a segunda equação nos dá

$$y = -11/15;$$

então, substituindo este valor na primeira equação, obtemos:

$$x + 4\left(-\frac{11}{15}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} + \frac{44}{15} = \frac{25+44}{15} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}.$$

Assim, o sistema é possível e determinado, eua única solução é $(x, y) = \left(\frac{23}{5}, -\frac{11}{15}\right)$. □

Exemplo 6. *Resolva o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}.$$

Solução. Neste caso, para eliminar a variável x da segunda equação, basta subtrair dela duas vezes a primeira equação. Ao fazer isso, obtemos:

$$4x + 6y - 2 \cdot (2x + 3y) = 12 - 2 \cdot 5.$$

Acidentalmente, ao fazer isso acabamos eliminando também a variável y, uma vez que a equação acima pode ser simplificada para

$$0x + 0y = 2.$$

Temos, então, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}.$$

Contudo, não existem x e y que satisfaçam a segunda equação deste sistema. Portanto este sistema não possui solução, ou seja, ele é impossível. Como o sistema original é equivalente a este, ele também é impossível. □

Exemplo 7. *Resolva o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases}.$$

Solução. Neste exemplo, se multiplicarmos a primeira equação por $3/2$ e subtrairmos o resultado da segunda equação, obteremos o sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}.$$

Observe que a segunda equação é satisfeita por quaisquer valores de x e y, ou seja, ela não impõe qualquer restrição ao sistema. Sendo assim, o sistema é equivalente simplesmente à equação $2x + 4y = 12$. Esta, por sua vez, possui infinitas soluções. Logo, o sistema original é possível, mas é indeterminado. □

5 O método da eliminação gaussiana (ou do escalonamento)

Agora que temos uma ideia intuitiva, dada pelos exemplos anteriores, de como o método da eliminação deve funcionar, vamos descrevê-lo mais formalmente. Na próxima seção, o utilizaremos para resolver sistemas de três variáveis.

O *método da eliminação gaussiana*, ou simplesmente eliminação, serve tanto para classificar o sistema como para determinar o seu conjunto solução. A ideia central é obter um sistema equivalente ao original, mas de resolução mais fácil.

Ele consiste de duas fases. Na *fase de eliminação*, o objetivo é empregar *operações elementares* ao sistema, a fim de obter o sistema equivalente, simplificado. Para isso, as operações elementares que iremos utilizar são as seguintes:

1. Multiplicar (ou dividir) uma equação por uma constante não nula.

2. Somar (ou subtrair) a uma equação um múltiplo de outra equação.

3. Trocar as posições de duas equações no sistema.

Estas operações podem ser aplicadas a qualquer sistema linear, sem que se altere os conjuntos-solução dos mesmos.

A fase de eliminação consiste em aplicar estas operações de forma sistemática, numa ordem bem específica: escolhemos uma das variáveis da primeira equação e vamos eliminar tal variável de todas as outras equações; em seguida escolhemos uma variável que não foi eliminada da segunda equação e vamos eliminá-la de todas as equações abaixo dela (ou seja todas equações, exceto as duas primeiras); depois escolhemos uma variável da terceira equação e a eliminamos de todas as equações abaixo dela, e assim sucessivamente, enquanto existirem variáveis com coeficientes não nulos para as quais o passo de eliminação ainda não foi aplicado.

Na segunda fase, chamada de *substituição retrocedida*, o sistema simplificado é resolvido "de baixo para cima": começa-se resolvendo a última equação, cuja solução é substituída na penúltima, que após resolvida tem sua solução substituída na antepenúltima, e assim consecutivamente, até obter-se a solução final.

6 Sistemas com três variáveis

Conforme prometido anteriormente, vamos exemplificar o método da eliminação em alguns sistemas lineares com três variáveis, interpretando em seguida os possíveis resultados.

Exemplo 8. *Resolva o seguinte sistema linear utilizando o método da eliminação gaussiana:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & -10 \end{array}\right. .$$

Solução. Nosso primeiro objetivo será eliminar a variável x da segunda e da terceira equações.

Para eliminar a variável x da segunda equação, vamos executar duas operações. Primeiramente, multiplicamos a segunda equação por 2 e, em seguida, somamos a primeira equação ao resultado. (As demais equações permanecem inalteradas.) Após a primeira operação, obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ -2x & + & 2y & + & 4z & = & 14 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & -10 \end{array}\right. ;$$

depois da segunda operação, o resultado é:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & - & y & + & 8z & = & 22 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & -10 \end{array}\right. .$$

Analogamente, para eliminar x da terceira equação, vamos multiplicá-la por 2 e, dessa vez, vamos dela subtrair a primeira equação. Tendo feito essas duas operações, o sistema obtido é:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8, \\ & - & y & + & 8z & = & 22, \\ & + & 7y & - & 14z & = & -28. \end{array}\right.$$

Veja que, agora, a variável x está presente apenas na primeira equação, como queríamos. Nosso próximo objetivo é fazer com que a variável y esteja presente apenas na primeira e na segunda equações, ou seja, queremos eliminá-la da terceira equação. Para isso, basta olhar para os coeficientes de y na segunda e na terceira equações. Começamos dividindo a terceira equação por 7, obtendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & - & y & + & 8z & = & 22 \\ & + & y & - & 2z & = & -4 \end{array}\right. .$$

Em seguida, somamos a segunda equação à terceira, chegando a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & - & y & + & 8z & = & 22 \\ & & & + & 6z & = & 18 \end{array}\right. .$$

Isso termina a fase da eliminação. Agora, para encontrar a solução do sistema, podemos facilmente resolver as equações de baixo para cima. Da última equação, temos que

$$z = 3.$$

Em seguida, substituindo este valor na penúltima equação, vem que

$$-y + 8 \cdot 3 = 22 \Rightarrow y = 2.$$

Por fim, substituindo os valores de y e z na primeira equação, obtemos:

$$2x - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \Rightarrow 2x = 8 + 6 - 12 = 2 \Rightarrow x = 1.$$

A conclusão é que nosso sistema possui uma única solução: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Logo, ele é possível e determinado. □

No caso em que, durante o processo de eliminação gaussiana, obtivermos uma equação com todos os coeficientes iguais a zero mas termo independente diferente de zero, pelo que discutimos anteriormente concluiremos de imediato que o sistema é impossível. Por outro lado, se obtivermos uma equação em que todos os coeficientes e o termo independente são iguais a zero, a conclusão é que esta equação é automaticamente satisfeita. Neste caso, ela pode ser eliminada do sistema sem prejuízo algum. No entanto, devemos continuar com o método de eliminação até o final, para decidir se o sistema como um todo é possível ou não. Como começamos com um sistema com número de equações menor ou igual ao de variáveis, restarão agora menos equações do que variáveis. Neste caso pode-se demonstrar que, se conseguirmos encontrar uma solução, então o sistema será indeterminado; caso contrário, ele será impossível.

Os dois próximos exemplos ilustram as possibilidades discutidas no parágrafo anterior.

Exemplo 9. *Resolva o sistema linear abaixo, usando o método da eliminação gaussiana.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 6z & = & 8 \\ -2x & - & y & - & 2z & = & 9 \\ & & 2y & + & 4z & = & 10 \end{array}\right. .$$

Solução. Como a terceira equação já não possui a variável x, de início basta eliminar a variável x da segunda equação. Para isso vamos substituir a segunda equação pela soma dela com a primeira equação. Temos, então:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 6z & = & 8 \\ & & 2y & + & 4z & = & 17 \\ & & 2y & + & 4z & = & 10 \end{array}\right. .$$

(Neste momento, já poderíamos perceber que a segunda equação contradiz a terceira, mas por completude, vamos continuar com o método). Resta apenas eliminar a variável y da terceira equação e, para isso, basta substituir a terceira equação pela diferença entre ela e a segunda equação. O resultado é:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 6z & = & 8 \\ & & 2y & + & 4z & = & 17 \\ & & 0y & + & 0z & = & -7 \end{array}\right. .$$

A última equação não possui solução, o que nos diz que esse sistema é impossível. Sendo assim, o sistema original, que é equivalente a este último, também é impossível. □

Exemplo 10. *Resolva o sistema linear abaixo usando método da eliminação gaussiana.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & + & 6z & = & 7 \end{array}\right. .$$

Solução. Mais uma vez, vamos fazer o processo de eliminação gaussiana, passo a passo. Para eliminar a variável x da segunda equação, basta subtrair dela a primeira equação. Assim procedendo, obtemos o sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & + & 6z & = & 7 \end{array}\right. .$$

Para eliminar a variável x da terceira equação, basta subtrair dela três vezes a primeira equação. Obtemos, agora:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Observe que, no último sistema acima, a segunda e a terceira equações são iguais. Dessa forma, podemos eliminar uma delas. Outra maneira de perceber isso seria continuando com o processo de eliminação: para eliminar a variável y da terceira equação, poderíamos subtrair a segunda equação da terceira, obtendo-se o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}\right. .$$

De um modo ou outro, a última equação pode ser eliminada, e o sistema simplificado para:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Resta decidir se este sistema é possível indeterminado ou impossível. Claramente, podemos atribuir qualquer valor à variável z e, a partir dele, encontrar sucessivamente um valor para y e, em seguida, outro para x. Dessa forma, o sistema possui, sim, soluções. De fato, é fácil encontrar todos tais x e y como funções de z, de modo que podemos descrever todas as soluções deste sistema como segue. Primeiramente, a terceira equação do último sistema nos dá

$$2y = 1 - 3z \implies y = \frac{1-3z}{2}.$$

Em seguida, substituindo o valor de y assim obtido na primeira equação, temos:

$$x + \frac{1-3z}{2} + z = 2 \implies x = 2 - z - \frac{1-3z}{2} = \frac{3+z}{2}.$$

Assim, o cojunto-solução do sistema original é:

$$\left\{\left(\frac{3+z}{2}, \frac{1-3z}{2}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}. \qquad (3)$$

□

Observação 11. *O conjunto-solução do sistema anterior poderia ser expresso de várias outras formas, por exemplo, encontrando-se os valores de y e z em função de x (exercício). Em todo caso, o conjunto das triplas que satisfazem o sistema é sempre o mesmo, independentemente da representação escolhida. Por exemplo, fazendo $z = 0$ em (3), obtemos que $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ é uma das soluções do sistema. Fazendo $z = 1/3$, obtemos que $\left(\frac{10}{6}, 0, \frac{1}{3}\right)$ é uma outra solução. Bem entendido, qualquer valor de z nos fornece uma solução diferente.*

Observação 12. *Ainda em relação ao exemplo anterior, a expressão (3) é o que chamamos de uma solução geral do sistema (já que ela gera todas as possíveis soluções). Neste caso específico, conseguimos escrever todas as variáveis em função de uma única variável (z). Em outros sistemas indeterminados, pode acontecer que, para encontrar a solução geral, tenhamos primeiro que fixar um subconjunto de duas ou mais variáveis e, depois, explicitar os valores das variáveis restantes em função daquelas que foram fixadas.*

Dicas para o Professor

Recomendamos que este material seja apresentado em dois encontros de 50 minutos. No primeiro encontro pode ser feita uma revisão dos métodos de resolução de sistemas com duas equações e duas variáveis, incluindo exemplos em que o sistema possui uma única solução, nenhum solução e infinitas soluções. No segundo encontro pode ser apresentado o método da eliminação gaussiana aplicado a sistemas com três equações.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Matrizes.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.