Material Teórico - Módulo de Razões e Proporções

Propriedades de Proporções

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

1 Introdução

Nesta aula, daremos continuidade ao estudo das proporções apresentando algumas de suas propriedades, as quais serão úteis nas soluções de exercícios. A primeira delas é a seguinte:

Proposição 1

Se (x, y, a, b) é uma proporção, então $(x+y, y, a+b, b)$ também é uma proporção. De outra forma,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b}.$$

Antes de demonstrarmos esta propriedade, revisitaremos o último exercício da aula anterior para mostrar uma aplicação deste resultado:

Exercício 1 (Exercício 7 da aula anterior). *Em uma conferência, a razão entre brasileiros e estrangeiros era de* $(7 : 9)$*. Se havia* 80 *pessoas nessa reunião, quantos eram os brasileiros?*

Solução. Sejam x o número de brasileiros e y o número de estrangeiros. Pelo enunciado, sabemos que $(x, y, 7, 9)$ formam uma proporção. Dessa forma, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{9}.$$

Por outro lado, sabemos que o número total de pessoas é 80, ou seja, que $x + y = 80$. A fim de utilizar essa dado, aplicamos o resultado da Proposição 1 para obter, a partir da proporção acima:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{7+9}{9}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{80}{y} = \frac{16}{9}.$$

Multiplicando em xis, encontramos:

$$16y = 720 \Rightarrow y = 45.$$

Portanto, temos $x = 80 - 45 = 35$ brasileiros. □

Demonstração da Proposição 1. Partindo da iguadalde entre as razões $\frac{x}{y}$ e $\frac{a}{b}$ e somando 1 aos dois lados da proporção, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{y} + 1 = \frac{a}{b} + 1.$$

Agora, lembrando que $\frac{y}{y} = \frac{b}{b} = 1$, escrevemos a última igualdade acima como:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{y} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}.$$

Por fim, basta notar que isso é o mesmo que

$$\frac{x+y}{y} = \frac{a+b}{b}.$$

Observação: Note que se (x, y, a, b) é uma proporção, então (y, x, b, a) também o é. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} &\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow \frac{y+x}{x} = \frac{b+a}{a} \\ &\Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{a}{a+b}. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{a}{a+b}.$$

A segunda propriedade é semelhante à primeira, porém utilizando a operação de subtração:

Proposição 2

Se (x, y, a, b) é uma proporção, então $(x-y, y, a-b, b)$ também é uma proporção. Em símbolos,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{a-b}{b}.$$

A demonstração da Proposição 2 é bastante similar à da Proposição 1. A única diferença está no passo em que somamos 1 aos dois lados da proporção. Desta vez, subtraímos 1. Observe também que podemos inverter as razões e demonstrar que, se $x \neq y$ (e, portanto, $a \neq b$), então

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{a}{b-a}.$$

□

Vejamos uma aplicação da segunda propriedade.

Exercício 2. *Em um parque de diversões, a razão entre adultos e crianças era de* $(5 : 7)$*. Se há* 226 *crianças a mais do que adultos, quantas pessoas temos ao todo no parque?*

Solução. Sejam x o número de adultos e y o número de crianças. Pelo enunciado, sabemos que $(x, y, 5, 7)$ formam uma proporção. Dessa forma, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}.$$

Por outro lado, sabemos que há 226 crianças a mais do que adultos, ou seja, que $y - x = 226$. Assim, aplicando o resultado da Proposição 2, obtemos:

$$\frac{x}{y-x} = \frac{5}{7-5}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{x}{226} = \frac{5}{2}.$$

Multiplicando em xis, encontramos:

$$2x = 1130 \Rightarrow x = 565.$$

Portanto, $y = 565 + 226 = 791$ e $x + y = 1356$. □

Proposição 3

Se (x, y, a, b) é uma proporção, então vale que:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{x+a}{y+b}.$$

Demonstração da Proposição 3. A primeira igualdade é dada pela própria definição de proporção.

Quanto à segunda, observe que

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{x+a}{y+b} &\Leftrightarrow x(y+b) = y(x+a) \\ &\Leftrightarrow xy + xb = yx + ya \\ &\Leftrightarrow xb = ya \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Portanto, a segunda igualdade é, em verdade, equivalente à primeira.

Exercício 3. *Dona Filó deseja fazer* $2,6kg$ *de biscoitos com três ingredientes: manteiga, açúcar e farinha, os quais devem estar na proporção de* $(6:4:3)$*. Quantos gramas de farinha ela deve usar?*

Solução. Sejam x, y e z as quantidades (em gramas) de manteiga, açúcar e farinha (respectivamente) utilizadas para fazer os biscoitos. Sabemos que

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

Pela Proposição 3, temos que

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{x+y}{6+4},$$

de sorte que

$$\frac{x+y}{6+4} = \frac{z}{3}.$$

Utilizando mais uma vez esta mesma propriedade, obtemos:

$$\frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{z}{3}.$$

Agora, como $2,6kg$ é o mesmo que $2600g$, temos $x+y+z = 2600$. Daí, a última igualdade acima fornece

$$\frac{2600}{13} = \frac{z}{3}$$

e, multiplicando em 'xis', segue que $z = 600$. □

Para finanlizar esta seção teórica, apresentamos uma quarta propriedade de proporções, a qual está relacionada com a operação de multiplicação.

Proposição 4

Se (x, y, a, b) é uma proporção, então (x^2, xy, a^2, ab) também é uma proporção. De outra forma,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x^2}{xy} = \frac{a}{b}.$$

Demonstração da Proposição 4. Partindo da igualdade entre as razões $\frac{x}{y}$ e $\frac{a}{b}$ e multiplicando os dois lados de tal igualdade por 1, segue que:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

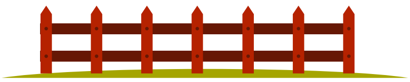
Lembrando agora que $\frac{x}{x} = 1$, podemos escrever

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{a}{b}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{x^2}{xy} = \frac{a}{b}.$$

Exercício 4. *Fernando comprou um terreno em formato retangular, com* $2.000m^2$ *de área, para criar animais. As dimensões do terreno estão entre si na razão de* $5:4$. *Ele deseja construir uma cerca percorrendo todo o perímeto do terreno, a qual custará* 5 *reais por metro. Quanto ele gastará para construi-la?*



Solução. Sejam x e y as dimensões do terreno. Pelo enunciado, sabemos que $(x, y, 5, 4)$ forma uma proporção, o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$$

Agora, pela fórmula para a área de um retângulo, sabemos que $xy = 2000$. Então, utilizando a última propriedade de proporções vista acima, temos:

$$\frac{x^2}{xy} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{2000} = \frac{5}{4}.$$

Multiplicando em xis, encontramos:

$$4x^2 = 2000 \cdot 5 \Rightarrow x^2 = 2500 \Rightarrow x = 50.$$

Portanto, $y = \frac{2000}{50} = 40$, e o perímetro do terreno é igual a $2(x + y) = 2(50 + 40) = 180$. Por fim, como cada metro de cerca custa cinco reias, o total a ser gasto será de $5 \cdot 180 = 900$ reais. $\square$

2 Exercícios

Encerramos este material resolvendo mais alguns exercícios, a título de revisão.

Exercício 5. *As dimensões de um tanque de água em formato de uma caixa retangular são proporcionais a* $(2 : 3 : 4)$ *e correspondem à profundidade, largura e comprimento, nesta ordem. Se o tanque tem* $192m^3$ *de volume, calcule sua profundidade.*

Solução. Sejam x, y e z as medidas de profundidade, largura e comprimento do tanque. Pelo enunciado, sabemos que:

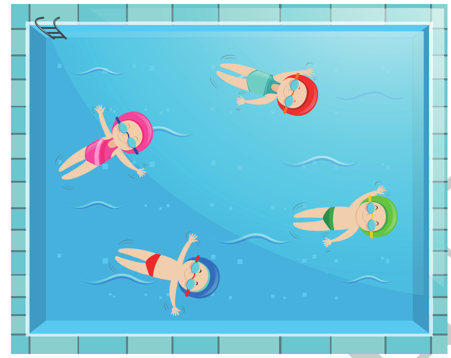
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k,$$

onde k é a razão de proporcionalidade. Dessa forma, $x = 2k$, $y = 3k$ e $z = 4k$.

Por outro lado, sabemos que $xyz = 192$. Logo, $2k \cdot 3k \cdot 4k = 192$ ou, o que é o mesmo:

$$24k^3 = 192 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2.$$

Logo, a profundidade do tanque é $x = 2k = 4m$. $\square$



Exercício 6. *Rafael decidiu doar* 70 *figurinhas de sua coleção a três amigos, seguindo a proporção* $(2 : 3 : 5)$. *Quantas figurinhas recebeu o primeiro amigo?*

Solução. Sejam x, y e z as quantidades de figurinhas recebidas pelos amigos de Rafael. Pelo enunciado, sabemos que:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k,$$

onde k é a razão de proporcionalidade. Então, $x = 2k$, $y = 3k$ e $z = 5k$.

Por outro lado, uma vez que $x + y + z = 70$, temos $2k + 3k + 5k = 70$, ou seja:

$$10k = 70 \Rightarrow k = 7.$$

Assim, o primeiro amigo de Rafael recebeu $x = 2 \cdot 7 = 14$ figurinhas. $\square$

Observe que a terceira propriedade de proporções vista acima fornece outra solução para o exercício anterior. De fato, aplicando-a duas vezes a partir de

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5},$$

obtemos sucessivamente

$$\frac{x}{2} = \frac{y + z}{3 + 5}$$

e

$$\frac{x}{2} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5}.$$

Então, temos

$$\frac{x}{2} = \frac{70}{10} \Rightarrow x = 14.$$

$\square$

Exercício 7. *Na fazenda 'Boa Esperança' a razão entre a área cultivável e a zona de preservação natural é* $3 : 7$. *Sabendo que a fazenda tem, ao todo, 30 hectares, calcule o tamanho da área cultivável.*

Solução. Sejam x o tamanho da área cultivável e y o tamanho da área preservada. Pelo enunciado, sabemos que a quádrupla $(x, y, 3, 7)$ forma uma proporção, o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7}.$$

Por outro lado, sabemos o tamanho total da fazenda é de 30 hectares, ou seja, que $x + y = 30$. Então, usando a primeira propriedade das proporções, temos:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{3+7}{7} \Rightarrow \frac{30}{y} = \frac{10}{7}.$$

Multiplicando em xis, encontramos:

$$10y = 210 \Rightarrow y = 21.$$

Portanto, temos $x = 30 - 21 = 9$ hectares de área cultivável. □

Sugestões ao Professor

Recomendamos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cada para apresentar este material. No primeiro encontro, elabore a introdução focando nas demonstrações e aplicações das propriedades de proporções. Devote o segundo encontro à resolução dos exercícios colecionados na segunda seção do material, a fim de fixar adequadamente o conteúdo. Nesse sentido, para que os alunos apreciem a simplificação obtida nas soluções com a utilização da propriedades de proporções, é interessante que o professor resolva cada um desses exercícios duas vezes: a primeira utilizando as propriedades de proporções, ao passo que a segunda utilizando outros métodos, como por exemplo sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.

Créditos pelas figuras:
`www.freepik.com`