Material Teórico - Módulo Teorema de Pitágoras e Aplicações

Aplicações do Teorema de Pitágoras

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

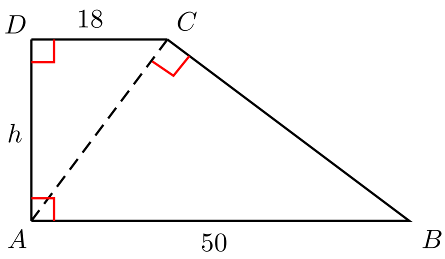
26 de maio de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Algumas aplicações simples

Nessa aula, apresentaremos mais algumas aplicações do Teorema de Pitágoras.

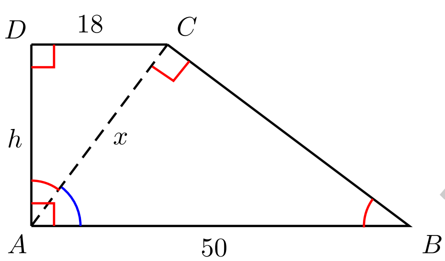
Exemplo 1. *Calcule a área do trapézio retângulo desenhado na figura a seguir.*



Solução. Vamos denotar por x a medida da diagonal AC. Agora, veja que

$$D\widehat{A}C = 90^\circ - C\widehat{A}B = C\widehat{B}A,$$

logo, os triângulos DAC e CBA são semelhantes (pelo caso AA).



Desse modo, obtemos

$$\frac{x}{50} = \frac{18}{x} \Longrightarrow x^2 = 18 \cdot 50 = 900.$$

(Neste ponto, poderíamos calcular $x = \sqrt{900} = 30$, mas, como queremos obter a área do trapézio, procederemos de outra forma.)

Por outro lado, utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD, obtemos

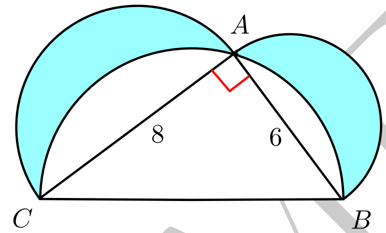
$$\begin{aligned} h^2 + 18^2 = x^2 &\Longrightarrow h^2 = x^2 - 18^2 \\ &\Longrightarrow h^2 = 900 - 18^2 \\ &\Longrightarrow h^2 = 30^2 - 18^2 \\ &\Longrightarrow h^2 = (30+18)(30-18) = 48 \cdot 12 \\ &\Longrightarrow h^2 = 4 \cdot 12 \cdot 12 = 2^2 \cdot 12^2 \\ &\Longrightarrow h = 2 \cdot 12 = 24. \end{aligned}$$

Então,

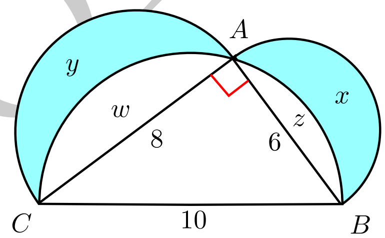
$$[ABCD] = \frac{(18+50)h}{2} = \frac{68 \cdot 24}{2} = 816.$$

□

Exemplo 2. *Na figura abaixo, temos um triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo, e dois outros semicírculos cujos diâmetros são os catetos de ABC. Encontre a soma das medidas das áreas das duas regiões coloridas (essas regiões são conhecidas como **lúnulas de Hipócrates**[1]).*



Solução. Denotemos (acompanhe na figura a seguir) por x e y as medidas das áreas coloridas e por z e w as diferenças entre essas áreas e as áreas dos semicírculos cujos diâmetros são os catetos de ABC.



Uma vez que os raios de tais semicírculos são 3 e 4, temos

$$x + z = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{2}$$

e

$$y + w = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = \frac{16\pi}{2}.$$

Somando essas duas equações, chegamos a

$$x + y + z + w = \frac{9\pi}{2} + \frac{16\pi}{2} = \frac{25\pi}{2}. \tag{1}$$

Agora, observe que $z + w$ é a diferença entre as áreas do semicírculo de diâmetro BC e do triângulo retângulo ABC. Por um lado, temos

$$[ABC] = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

Por outro, a fim de calcular a área do semicírculo, veja que o Teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

[1] Em homenagem a Hipócrates de Chios, matemático, geômetra e astrônomo grego que viveu aproximadamente de 470 a 410 a.C.

de sorte que $\overline{BC} = 10$. Assim, obtemos

$$z + w = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 - 24 = \frac{25\pi}{2} - 24.$$

Por fim, substituindo o valor de $z+w$ em (1), concluímos que

$$x + y + \cancel{\frac{25\pi}{2}} - 24 = \cancel{\frac{25\pi}{2}} \Longrightarrow x + y = 24.$$

$\square$

Um outro modo de mostrar que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo ABC é a seguinte: se F_1, F_2 e F_3 são as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os catetos e a hipotenusa de ABC, respectivamente, então

$$F_1 + F_2 = F_3. \tag{2}$$

(Observe que esse fato generaliza o teorema de Pitágoras, quando damos a ele a seguinte interpretação: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois catetos – aliás, era exatamente essa a forma pela qual os gregos entendiam e enunciavam o teorema de Pitágoras.)

Podemos justificar (2) observando que

$$\frac{F_1}{F_3} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$$

e

$$\frac{F_2}{F_3} = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{64}{100}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}\frac{F_1 + F_2}{F_3} &= \frac{F_1}{F_3} + \frac{F_2}{F_3} \\ &= \frac{36}{100} + \frac{64}{100} \\ &= 1,\end{aligned}$$

sendo a última igualdade decorrente, em última análise, do teorema de Pitágoras.

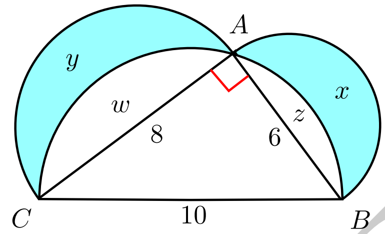
Em particular, quando construímos semicírculos sobre os catetos de ABC (veja a figura a seguir), temos que a soma das áreas dos dois semicírculos construídos sobre os catetos é igual à área do semicírculo construído sobre a hipotenusa, pois semicírculos são figuras semelhantes. Nas notações da figura, essa afirmação fornece a igualdade

$$(y + w) + (x + z) = w + z + [ABC].$$

Então, cancelando as parcelas w e z, obtemos

$$y + x = [ABC],$$

conforme desejávamos.



Observação 3. *Em geral, a construção das lúnulas de Hipócrates pode ser feita em todo triângulo retângulo. Assim fazendo, e adaptando os argumentos de uma qualquer das soluções que apresentamos, pode ser mostrado que a soma das áreas das lúnulas é sempre igual à área do triângulo ABC.*

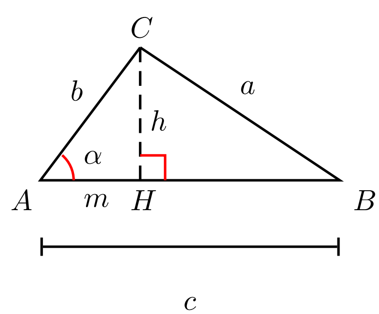
Agora vamos reobter a Lei dos Cossenos como aplicação do Teorema de Pitágoras.

Proposição 4 (Lei dos Cossenos). *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $B\widehat{A}C = \alpha$. Então, vale a relação*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{3}$$

Prova. Evidentemente, (3) é válida se $\alpha = 90°$, uma vez que, nesse caso, temos $\cos\alpha = 0$. Supondo $\alpha \neq 90°$, dividiremos a prova da Lei dos Cossenos em dois casos:

(i) Se α é agudo, sejam H o pé da perpendicular à reta suporte do lado AB passando por C, $h = \overline{CH}$ e $m = \overline{AH}$ (veja a figura a seguir, na qual ilustramos o caso em que também tem-se $A\widehat{B}C < 90°$ – de forma que $H \in AB$; os demais casos podem ser tratados de modo análogo).



Utilizando o teorema de pitágoras em AHC, obtemos

$$m^2 + h^2 = b^2 \Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2.$$

Da mesma forma, utilizando o teorema de Pitágoras em BHC, chagamos a

$$\begin{aligned} h^2 + (c - m)^2 = a^2 &\Longrightarrow h^2 = a^2 - (c - m)^2 \\ &\Longrightarrow h^2 = a^2 - c^2 - m^2 + 2mc. \end{aligned}$$

Igualando as expressões para h^2 obtidas nas duas equações acima, concluímos facilmente que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2mc. \tag{4}$$

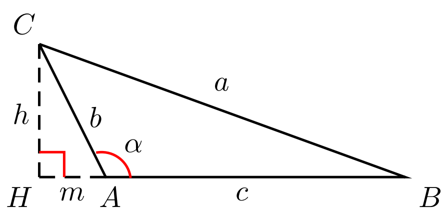
Por outro lado, invocando as razões trigonométricas no triângulo AHC, obtemos $\cos\alpha = \frac{m}{b}$ ou, ainda,

$$b\cos\alpha. \tag{5}$$

Finalmente, substituindo (5) em (4), segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(ii) Se α é obtuso, então, definindo o ponto H como no caso anterior, temos que está situado sobre o prolongamento do lado AB, com A entre H e C (veja a próxima figura).



Também como antes, sejam $m = \overline{AH}$ e $h = \overline{AH}$. Neste caso, utilizando o teorema de Pitágoras em AHC e em BHC, obtemos, respectivamente,

$$h^2 + m^2 = b^2 \Longrightarrow h^2 = b^2 - m^2$$

e

$$h^2 + (m+c)^2 = a^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - m^2 - c^2 - 2mc.$$

Igualando os valores de h^2 obtidos nas duas equações, chegamos a

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2mc. \tag{6}$$

Agora, sendo $\beta = C\widehat{A}H$, temos $\beta = 180^\circ - \alpha$, de sorte que $\cos\beta = -\cos\alpha$. Além disso, as relações trigonométricas no triângulo AHC fornecem $\cos\beta = \frac{m}{b}$, de onde obtemos

$$m = b\cos\beta = -b\cos\alpha.$$

Substituindo essa expressão para m em (6), chegamos a

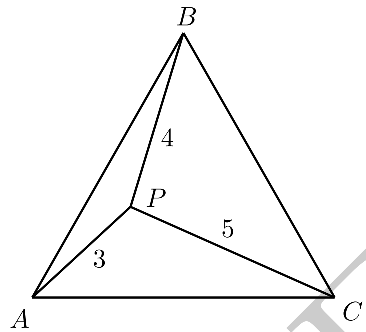
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

□

Finalizamos este material com uma aplicação do teorema de Pitágoras um pouco mais elaborada:

Exemplo 5. *Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC tal que $\overline{PA} = 3$, $\overline{PB} = 4$ e $\overline{PC} = 5$. Encontre a medida do lado de ABC.*

Solução. Denotemos a medida dos lados de ABC por ℓ.



Marque no plano o ponto D tal que APD é equilátero e B e D estão situados em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AP}$ (veja a figura abaixo). Então,

$$\begin{aligned} B\widehat{A}P &= 60^\circ - P\widehat{A}C \\ &= C\widehat{A}D. \end{aligned}$$

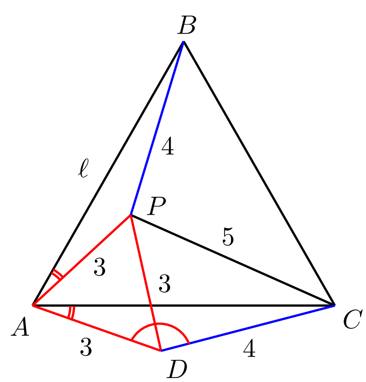
Além disso, $\overline{BA} = \overline{CA} = \ell$ e $\overline{AP} = \overline{AD} = 3$. Assim, os triângulos BAP e CAD são congruentes, pelo caso LAL. Segue daí que $\overline{DC} = \overline{BP} = 4$.

Uma vez que

$$\overline{CD}^2 + \overline{DP}^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = \overline{CP}^2,$$

a recíproca do teorema de Pitágoras garante que o triângulo CDP é retângulo em D. Portanto,

$$A\widehat{D}C = A\widehat{D}P + P\widehat{D}C = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$



Agora, a ideia é aplicar a lei dos cossenos ao triângulo ACD, a fim de calcular ℓ. De fato, como $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 150^\circ \\ &= 9 + 16 + 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 25 + 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Então, $\ell = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor todo o conteúdo deste material. É importante que os alunos percebam a igualdade entre a soma das medidas das áreas das lúnulas e a medida da área do triângulo retângulo, observando apenas a semelhança entre os semicírculos e a geometria presente no problema (sem fazer as contas). Esse tipo de exercício é fundamental para que eles desenvolvam a habilidade de *raciocínio geométrico*, a qual os permitirá resolver diversos outros problemas de Geometria.

As referências listadas abaixo apresentam outras aplicações do Teorema de Pitágoras.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.