

# Material Teórico - Círculo Trigonométrico

**Seno, cosseno e tangente.**

**Primeiro Ano do Ensino Médio**

**Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

**20 de outubro de 2018**



# 1 Seno, cosseno e tangente

Na aula passada, vimos que se  $A = (1,0)$  e  $P$  é um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico, ou seja, o círculo de raio 1 e centro  $O = (0,0)$ , então a abscissa e a ordenada de  $P$  são, nessa ordem, o cosseno e o seno do ângulo  $\angle AOP$ . Em símbolos, se  $\alpha$  é a medida do ângulo  $\angle APO$  em radianos, ou seja, o comprimento do arco  $\widehat{AP}$ , então

$$P = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha). \quad (1)$$

De fato, usamos isso para definir os valores de  $\text{sen } \alpha$  e  $\cos \alpha$  de um número real  $\alpha$  qualquer: para encontrar  $\cos \alpha$  e  $\text{sen } \alpha$  basta percorrer (partindo do ponto  $A$ ) um arco de comprimento  $|\alpha|$  sobre o círculo trigonométrico, no sentido anti-horário quando  $\alpha > 0$  e horário quando  $\alpha < 0$ , marcar o ponto  $P$  e encontrar suas coordenadas. Dessa forma, podemos ver seno e cosseno como funções com domínio igual ao conjunto de todos os números reais. (Lembre-se de que estamos medindo arcos em radianos.)

**Exemplo 1.** Calcule  $\text{sen}(0)$ ,  $\cos(0)$ ,  $\text{sen}(\pi/2)$  e  $\cos(\pi/2)$ .

**Solução.** Considere  $A = (1,0)$ ,  $P$  como em (1) e seja  $\alpha = \widehat{AP}$ . Quando  $\alpha = 0$ , o ponto  $P$  coincide com  $A$  (o arco percorrido tem comprimento zero, logo, não saímos do ponto  $A$ ). Assim,  $P = (1,0)$  e, lembrando que a abscissa representa o cosseno de  $\alpha$  e a ordenada representa o seno, temos:

$$\text{sen}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(0) = 1.$$

Por outro lado, quando  $\alpha = \pi/2$ , como o círculo possui comprimento  $2\pi$ , teremos percorrido  $1/4$  do círculo. Dessa forma, estaremos parados no ponto  $P = (0,1)$ , de sorte que

$$\text{sen}(\pi/2) = 1 \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2) = 0. \quad \square$$

No Módulo “*Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares*” do nono ano do EF, aprendemos como calcular os valores de seno, cosseno e tangente dos arcos equivalentes a  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ . Juntamente com os valores obtidos no exemplo anterior, e lembrando que  $\text{tg}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$  só está definida quando  $\cos \alpha \neq 0$ , agrupamos os valores na seguinte tabela.

Ângulo (graus)	Ângulo (radianos)	sen	cos	tg
$0^\circ$	0	0	1	0
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Lembremos que quando  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos congruentes, ou seja,  $\alpha - \beta = 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , eles determinam um mesmo ponto  $P$  sobre o círculo trigonométrico. Dessa forma, temos que:

$$\alpha = \beta + 2k\pi \implies \begin{cases} \text{sen } \alpha = \text{sen } \beta, \\ \cos \alpha = \cos \beta. \end{cases}$$

Assim, vamos nos concentrar inicialmente em calcular senos e cossenos de arcos de 0 a  $2\pi$ .

**Exemplo 2.** Como observado na aula passada, boa parte das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão. Assim, se digitarmos 60 numa calculadora e teclarmos “SEN”, é possível que o resultado obtido não seja o seno de  $60^\circ$ , mas sim o seno de 60 rad (é provável que a calculadora tenha uma tecla para definir o modo de operação, “RAD” ou “DEG”, então é necessário ficar atento). Suponha que a calculadora está no modo “RAD”. O que representa o valor obtido?

Vamos calcular, como na aula passada, a menor determinação positiva de 60 radianos. Dividindo 60 por  $2\pi$  obtemos, aproximadamente, 9,549. Assim, o arco entre 0 e  $2\pi$  congruente a 60 tem comprimento  $60 + (-9) \cdot 2\pi$ , que vale aproximadamente 3,451. Isso é um pouco maior do que  $\pi$ , logo, está no quadrante III. Fazendo esse experimento, na calculadora, obtemos

$$\text{sen}(60) = \text{sen}(60 - 18\pi) \cong \text{sen}(3,451) \cong -0,304.$$

Isso faz sentido, uma vez no quadrante III o seno é negativo. Por outro lado, veja que

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866.$$

Neste texto, sempre que omitirmos a unidade, é porque estamos usando radianos.

**Exemplo 3.** Para todo arco  $\alpha$ , vale que

$$\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

**Solução.** Suponha que, partindo de  $(1,0)$  e percorrendo um arco de medida  $\alpha$ , paramos no ponto  $P = (x,y)$ , de forma que  $\text{sen}(\alpha) = y$  e  $\cos(\alpha) = x$ . Perceba que percorrer o arco  $-\alpha$  significa percorrer  $\alpha$  no sentido oposto. Ao fazermos isso, pararemos no ponto  $P'$ , simétrico de  $P$  em relação ao eixo- $x$ . Dessa forma,  $P' = (x, -y)$ , e temos que  $\cos(-\alpha) = x = \cos(\alpha)$  e  $\text{sen}(-\alpha) = -y = -\text{sen}(\alpha)$ .  $\square$

## 2 Redução ao primeiro quadrante

Para qualquer ângulo  $\alpha$  do primeiro quadrante, ou seja,  $0 < \alpha < \pi/2$ , existe um triângulo retângulo que possui  $\alpha$  como um de seus ângulos. As medidas dos catetos e

da hipotenusa de um tal triângulo podem ser usadas para calcular o seno, cosseno e tangente de  $\alpha$ .

Por outro lado, para outros valores de  $\alpha$  isso não é possível (já que a soma das medidas dos dois ângulos não retos de um triângulo retângulo é  $\pi/2$ ), mas podemos comparar os valores do seno, cosseno e tangente de  $\alpha$  com aqueles de um ângulo  $\beta$ , este entre  $0$  e  $\pi/2$ .

Para entendermos como fazer isso, seja  $P$  o ponto do círculo trigonométrico associado ao arco  $\alpha$ , seja  $B$  o pé da perpendicular traçada de  $P$  ao eixo- $x$  e  $O = (0,0)$ . Consideremos o triângulo retângulo  $BPO$ , de hipotenusa  $OP$  (de medida 1) – veja as figuras 1a, 1b e 1c, para  $\alpha$  nos quadrantes II, III e IV respectivamente, onde  $\alpha = \widehat{AP}$  está marcado em verde. Seja, ainda,  $\beta = \angle POB$ .

Como  $P = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$ , o fato de  $BPO$  ser retângulo de hipotenusa 1 garante que, para  $\alpha$  em qualquer quadrante, vale:

$$\overline{BO} = |\cos \alpha| = \cos \beta > 0, \quad (2)$$

$$\overline{BP} = |\text{sen } \alpha| = \text{sen } \beta > 0. \quad (3)$$

Contudo, a relação entre  $\alpha$  e  $\beta$ , assim como os sinais de  $\cos \alpha$  e  $\text{sen } \alpha$ , variam de um quadrante para outro (lembre-se de que estudamos os sinais em cada quadrante na aula passada).

•  **$\alpha$  no quadrante II:** pela Figura 1a, temos  $\beta = \pi - \alpha$ ,  $\text{sen } \alpha > 0$  e  $\cos \alpha < 0$ . Assim, as equações (2) e (3) fornecem

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \text{sen}(\pi - \alpha), \\ \cos \alpha &= -\cos(\pi - \alpha). \end{aligned}$$

•  **$\alpha$  no quadrante III:** pela Figura 1b que  $\beta = \alpha - \pi$ ,  $\text{sen } \alpha < 0$  e  $\cos \alpha < 0$ . Assim, pelas equações (2) e (3), vem

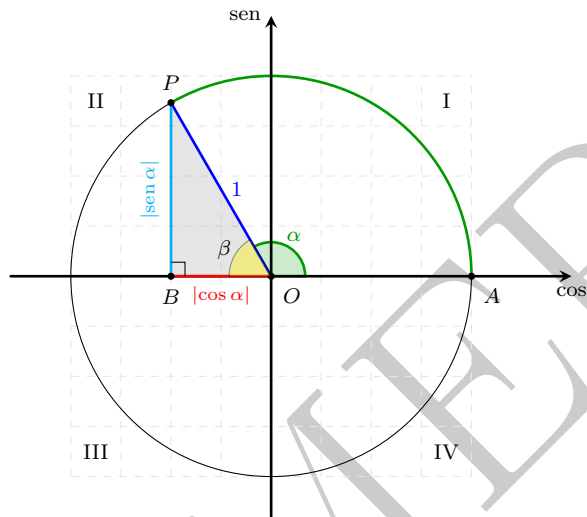
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= -\text{sen}(\alpha - \pi), \\ \cos \alpha &= -\cos(\alpha - \pi). \end{aligned}$$

•  **$\alpha$  no quadrante IV:** pela Figura 1c, temos  $\beta = 2\pi - \alpha$ ,  $\text{sen } \alpha > 0$  e  $\cos \alpha < 0$ . Assim, segue das equações (2) e (3) que

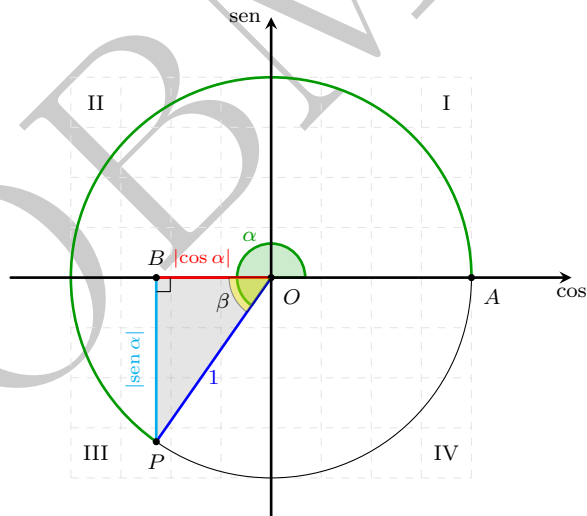
$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= -\text{sen}(2\pi - \alpha), \\ \cos \alpha &= \cos(2\pi - \alpha). \end{aligned}$$

**Observação 4.** É possível demonstrar que as relações acima, por exemplo,  $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha)$ , valem para todo  $\alpha$ , não apenas para o quadrante indicado. Contudo, a separação em casos por quadrante tem o intuito de garantir que  $\beta$  seja um ângulo entre  $0$  e  $\pi/2$ .

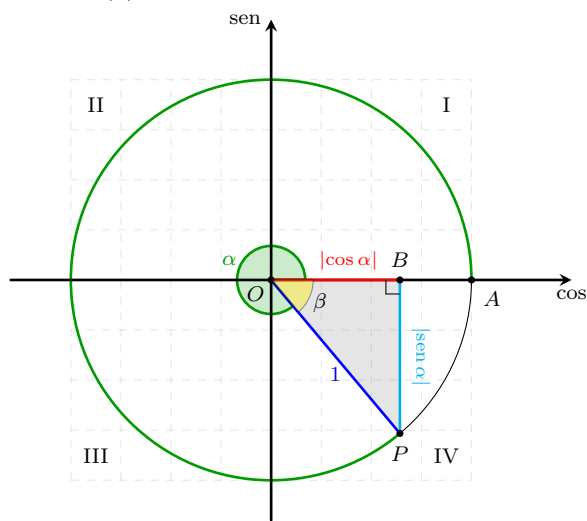
**Exemplo 5.** Calcule o seno e o cosseno de cada um dos seguintes arcos.



(a) seno e cosseno no segundo quadrante.



(b) seno e cosseno no terceiro quadrante.



(c) seno e cosseno no quarto quadrante.

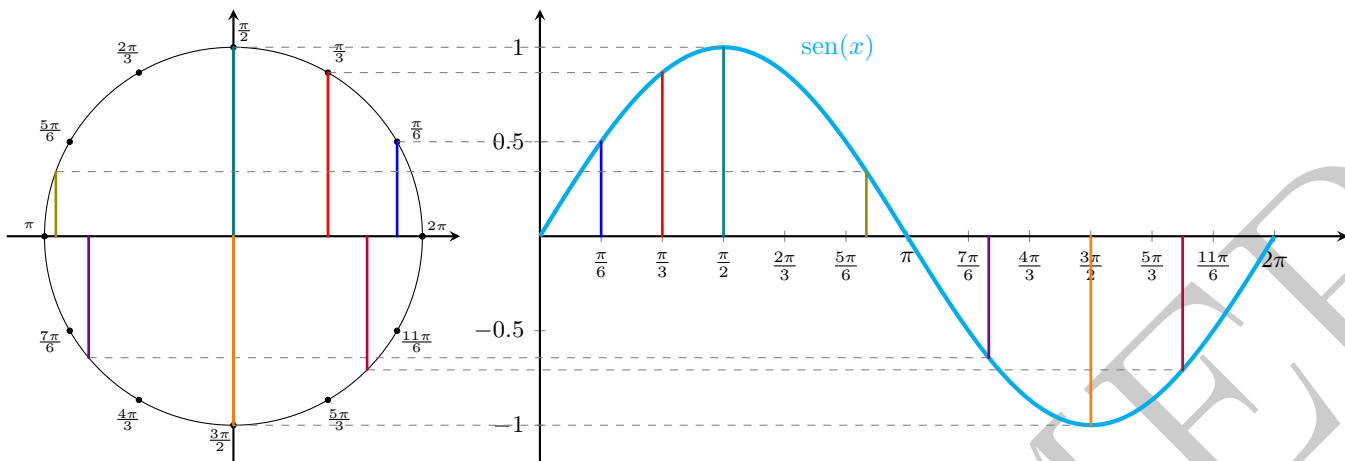


Figura 2: gráfico da função  $\text{sen}(x)$  quando  $x$  varia de 0 a  $2\pi$ , com alguns pontos marcados e seus correspondentes no círculo trigonométrico.

- (a)  $2\pi/3$ .  
 (b)  $5\pi/4$ .  
 (c)  $11\pi/6$ .

### Solução.

(a) Seja  $\alpha = 2\pi/3$ . Veja que  $\alpha$  está no segundo quadrante. Observando a Figura 1a, temos  $\text{sen } \alpha > 0$  e  $\text{cos } \alpha < 0$ , e  $\beta = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$  é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Logo,

$$\begin{aligned}\text{sen}(2\pi/3) &= \text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{cos}(2\pi/3) &= -\text{cos}(\pi/3) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Para  $\alpha = 5\pi/4$ , note que  $\alpha$  está no terceiro quadrante. Observando a Figura 1b, temos  $\text{sen } \alpha < 0$  e  $\text{cos } \alpha < 0$ , e  $\beta = 5\pi/4 - \pi = \pi/4$  é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Assim, temos

$$\begin{aligned}\text{sen}(5\pi/4) &= -\text{sen}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \text{cos}(5\pi/4) &= -\text{cos}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(c) Sendo  $\alpha = 11\pi/6$ , temos  $\alpha$  no quarto quadrante. Observando a Figura 1c, vemos que  $\text{sen } \alpha < 0$  e  $\text{cos } \alpha > 0$ , e  $\beta = 2\pi - 11\pi/6 = \pi/6$  é o ângulo que satisfaz (2) e (3). Dessa vez, temos que

$$\begin{aligned}\text{sen}(11\pi/6) &= -\text{sen}(\pi/6) = -\frac{1}{2}, \\ \text{cos}(11\pi/6) &= \text{cos}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned} \quad \square$$

Como isso, para qualquer número real  $\alpha$  de 0 a  $2\pi$ , podemos calcular  $\text{sen}(\alpha)$ . A Figura 2 nos mostra como desenhar o gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(x)$ , quando

$x$  varia de 0 a  $2\pi$ : do lado esquerdo temos uma cópia do círculo trigonométrico com alguns pontos marcados; do lado direito temos o gráfico desejado. Para obtê-lo, veja que cada ponto sobre o eixo horizontal do gráfico representa a medida de um arco (em radianos). Seleccionamos alguns valores de arcos para ilustrar, marcamos os pontos correspondentes no círculo, observamos que a altura de cada ponto marcado corresponde ao seno do arco e marcamos a mesma altura no gráfico. Sobre isso, veja também a animação no endereço [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle\\_cos\\_sin.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif).

Observe que entre 0 e  $\pi/2$  o valor de seno aumenta até atingir seu valor máximo, igual a 1. De  $\pi/2$  até  $\pi$  ele diminui até chegar a zero. De  $\pi$  a  $3\pi/2$  continua diminuindo até chegar a seu valor mínimo, igual a  $-1$ . Por fim, de  $3\pi/2$  a  $2\pi$  ele volta a aumentar, até chegar novamente a zero. Neste momento, completamos uma volta inteira no círculo, de forma que o gráfico da função passa a se repetir. Do mesmo modo, para valores negativos de  $x$  o padrão mantido é o mesmo. Isso é mostrado na curva em azul da Figura 3, que representa o gráfico de  $\text{sen}(x)$  quando  $x$  varia de  $-10$  até  $10$ .

Por sua vez, a curva em vermelho da Figura 3 é o gráfico de  $\text{cos}(x)$ . Como podemos perceber isso? Considerando um triângulo retângulo qualquer, se um de seus ângulos não retos tiver medida  $\alpha$ , o outro terá medida  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Como o cateto adjacente a  $\alpha$  é o cateto oposto a  $\beta$ , temos que  $\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$ . Logo,

$$\text{cos}(\alpha) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (4)$$

Apesar de que a argumentação acima só funciona para  $0 < \alpha < \pi/2$ , é possível provar que a equação (4) também é válida para qualquer  $\alpha$  real. Deixamos como exercício analisar o que acontece quando  $\alpha$  pertence a cada um dos

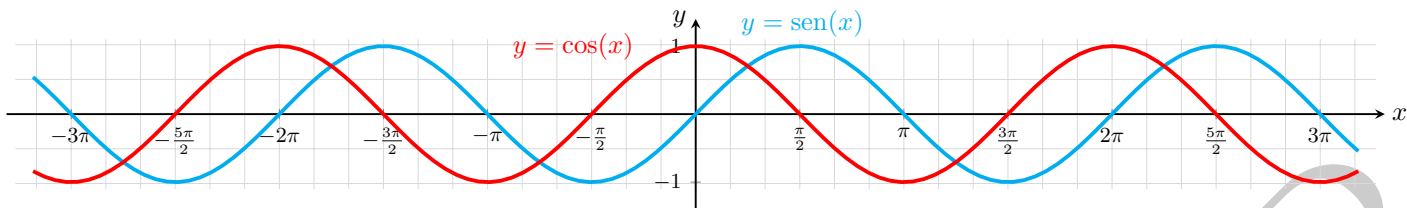


Figura 3: gráficos de seno e cosseno de  $-10$  a  $10$ .

outros quadrantes.

Dessa forma, o gráfico da função  $\cos(x)$  nada mais é do que uma translação do gráfico da função  $\sin(x)$ , e é dessa forma que a curva vermelha da Figura 3 pode ser obtida a partir da curva azul.

### 3 Tangente

Como já sabemos, a tangente de um ângulo  $\alpha$  pode ser definida como a razão entre o seno e o cosseno deste ângulo, desde que o cosseno seja diferente de zero. Também é possível visualizar a tangente usando o círculo trigonométrico.

Como antes, considere  $A = (1,0)$  e seja  $P$  um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico; também como antes, seja  $B$  o pé da perpendicular traçada de  $P$  ao eixo- $x$ . Agora, tracemos a reta perpendicular ao eixo- $x$  passado pelo ponto  $A$  (veja que, como essa reta é perpendicular ao raio  $OA$ , ela é tangente ao círculo trigonométrico), e chamemos de  $C$  o ponto de interseção da reta  $\overleftrightarrow{PO}$  com tal reta. Veja que a abscissa do ponto  $C$  é igual a 1. Vamos mostrar que sua ordenada é igual a  $\text{tg}(\alpha)$ . Primeiramente, mostremos que o comprimento do segmento  $\overline{AC}$  é igual ao valor absoluto de tangente de  $\alpha$ , ou seja,  $\overline{AC} = |\text{tg}(\alpha)|$ .

Na Figura 4, consideramos o caso em que  $\alpha$  está no primeiro quadrante, mas não é difícil verificar que o mesmo vale para os demais quadrantes. Veja que os triângulos  $AOC$  e  $BOP$  são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e possuem o ângulo  $\alpha$  em comum. Então, temos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BO}}$$

Substituindo  $\overline{AO} = 1$ ,  $\overline{BP} = |\text{sen } \alpha|$  e  $\overline{BO} = |\text{cos } \alpha|$  na igualdade acima, temos que

$$\overline{AC} = \frac{|\text{sen } \alpha|}{|\text{cos } \alpha|} = \left| \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \right| = |\text{tg } \alpha|.$$

Por fim, veja também que quando o ponto  $C$  está acima do ponto  $A$  é porque  $P$  está no quadrante I ou III; neste caso, temos que  $\text{tg}(\alpha)$  é positiva, pois  $\text{sen}(\alpha)$  e  $\text{cos}(\alpha)$  possuem o mesmo sinal. Da mesma forma, quando  $C$  está abaixo de  $A$ , temos  $\text{tg}(\alpha)$  é negativa, pois  $P$  está no quadrante II ou IV. Por conta disso, chamaremos a

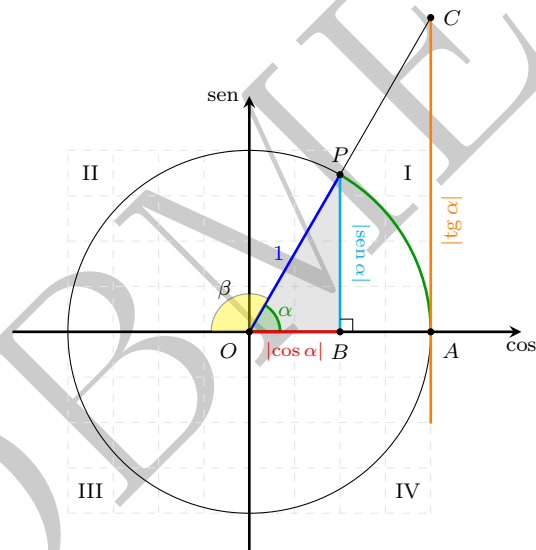


Figura 4: eixo das tangentes.

reta que contém o segmento  $AC$  de eixo das tangentes. Note que, quando  $\alpha = \pi/2$ , o valor de  $\text{tg}(\alpha)$  não está definido. Isso segue tanto porque a reta que passa por  $(0,0)$  e  $(0,1)$  (este último ponto correspondendo a  $P$  quando  $\alpha = \pi/2$ ) não intersecta o eixo das tangentes, quanto porque  $\text{tg}(\alpha) = \text{sen}(\alpha)/\text{cos}(\alpha)$  mas  $\text{cos}(\pi/2) = 0$ , de sorte que não podemos realizar uma divisão por zero. De forma geral, sempre que  $\text{cos}(\alpha) = 0$  o valor de  $\text{tg}(\alpha)$  não está definido. Isso acontece precisamente quando  $\alpha = \pi/2 + k\pi$  onde  $k$  é um número inteiro: quando  $k$  é par temos um arco congruente a  $\pi/2$  e quando  $k$  é ímpar temos um arco congruente a  $3\pi/2$ .

Com as observações acima, podemos construir o gráfico da função  $\text{tg}(x)$  (veja a Figura 5). Para cada número real  $x$ , consideremos  $\alpha = x$  e observamos o que acontece com o ponto  $C$  sobre o eixo das tangentes.

Dessa vez, vamos começar com  $x$  sendo um número negativo um pouco maior que  $-\pi/2$  (veja que quando  $x = -\pi/2$  o valor de  $\text{tg}(x)$  não está definido). Neste caso, o ponto  $C$  estará muito abaixo de  $A$ , de modo que  $\text{tg}(x)$  será um número negativo de grande valor absoluto. À medida que  $x$  aumenta de  $-\pi/2$  até  $\pi/2$ , o valor de  $\text{tg}(x)$  só aumenta,

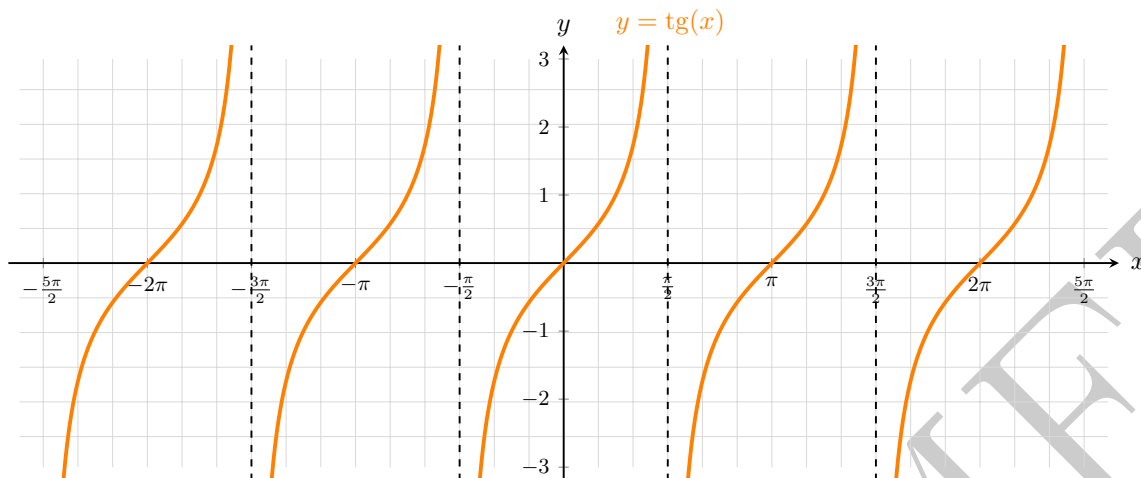


Figura 5: gráfico da tangente no intervalo de  $-5\pi/2$  a  $5\pi/2$ .

passado por 0 quando  $x = 0$  e crescendo indefinidamente quando  $x$  se aproxima de  $\pi/2$ . Porém, quando  $x = \pi/2$  o valor de  $\text{tg}(x)$  novamente não está definido. Repentinamente, para  $x$  um pouco maior que  $\pi/2$ , o valor de  $\text{tg}(x)$  volta a ser negativo e grande em módulo e o processo se repete, sempre em intervalos de comprimento  $\pi$ .

### Dicas para o Professor

Nesta aula, estendemos as noções de seno, cosseno e tangente de arcos entre 0 e  $\pi/2$  para arcos em geral. Mostramos ainda como são os gráficos de cada uma dessas funções. É importante que os alunos estejam confortáveis com o conteúdo da aula anterior e, em especial, estejam habituados a usar medidas de arcos em radianos. Outro pré-requisito geral desta aula é ter boa familiaridade com o sistema cartesiano e saber (genericamente) esboçar e interpretar gráficos de funções.

As referências colecionadas abaixo contém mais sobre *funções trigonométricas*.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.