Material Teórico - Módulo Função Quadrática

Funcão Quadrática: Exercícios

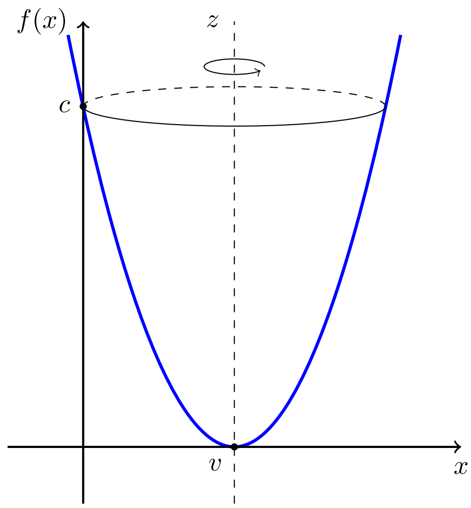
Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios

Exemplo 1. *A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo de simetria (o eixo z) conforme mostra a figura. A função real que expressa a parábola é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$, onde c é a medida da altura do líquido contido na taça. Sabendo-se que o ponto v representa o vértice da parábola, localizado no eixo das abscissas, qual é a altura do líquido?*



Solução 1. Como o vértice da parábola pertence ao eixo-x (e o eixo de simetria é perpendicular ao eixo-x), concluímos que o gráfico da parábola é tangente ao eixo-x. Dessa forma, a equação $f(x) = 0$ possui uma única raiz, ou seja, o discriminante da equação de segundo grau $\frac{3}{2}x^2 - 6x + c = 0$ é igual a zero. Daí,

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac = 0 &\implies (-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2}c = 0\\ &\implies 36 - 6c = 0\\ &\implies c = 6.\end{aligned}$$

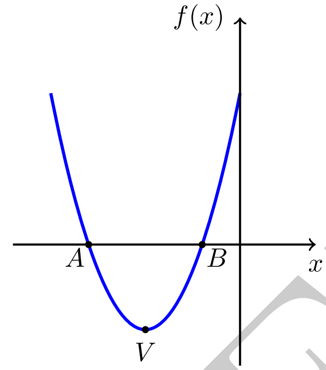
□

Solução 2. Sabemos que as coordenadas do vértice da parábola são (x_v, y_v) onde

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

De acordo com o gráfico da função, temos que $y_v = 0$ e, sendo assim, $-\dfrac{\Delta}{4a} = 0$. Daí, $\Delta = 0$ e podemos terminar a solução da mesma forma que na solução anterior. □

Exemplo 2. *O gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$ é uma parábola de vértice v e intersecta o eixo das abscissas nos pontos A e B. Qual é a área do triângulo AVB?*



Solução. Vamos calcular as coordenadas dos pontos A, B e V. Para A e B, devemos primeiro calcular as raízes de $4x^2 + 5x + 1 = 0$. Temos que $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$. Logo,

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} \dfrac{-5+3}{8} = -1/4, \\ \dfrac{-5-3}{8} = -1. \end{cases}$$

Portanto, $A = (-1, 0)$ e $B = (-1/4, 0)$ (ou vice-versa). Além disso, as coordenadas do vértice V são

$$x_v = -b/2a = -5/8 \quad \text{e} \quad y_v = -\Delta/4a = -9/16.$$

Logo, $V = (-5/8, -9/16)$.

Agora, para calcular a área do triangulo AVB podemos considerar o lado AB, que tem comprimento $|(-1/4) - (-1)| = 3/4$, como base. A altura de V em relação a essa base AB é simplesmente $|y_v| = 9/16$ (já que a reta que passa por A e B coincide com o eixo-x). Logo, a área desejada é (metade do produto entre os comprimentos da base e da altura):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{128}.$$

□

Exemplo 3. *Deseja-se cavar um buraco retangular com* $1\,\mathrm{m}$ *de largura, de modo que o volume cavado seja de* $300\,\mathrm{m}^3$. *Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa* 10 *reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, calcule o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que o custo da escavação seja o menor possível.*

Solução. Dado que a largura do buraco deve ser igual a 1, podemos escolher apenas seu comprimento e sua profundidade. Vamos chamá-los de x e y, respectivamente.

Então, temos que o volume do buraco é $x \cdot 1 \cdot y = xy$, de sorte que devemos ter $xy = 300$; portant, $y = \frac{300}{x}$.

Por outro lado, o custo de cavar será igual a $10(x \cdot 1) + 30y$ (com as contribuições de $10(x \cdot 1)$ e $30y$ correspondendo, respectivamente, aos preços de cavar um buraco de $x \cdot 1$ metros quadrados de área e y metros de profundidade).

Substituindo o valor de y, temos que o custo C é dado, em termos do comprimento x, por:

$$C = 10x + \frac{9000}{x}. \tag{1}$$

Veja que podemos pensar em C como uma função de x. Por outro lado, também podemos inverter o problema e nos perguntar se, para dado um valor do custo C, existe algum valor para o comprimento x tal que o custo seja igual a C.

A fim de analisar o problema dessa maneira, reescrevemos a equação (1) (multiplicando por x dos dois lados e trazendo todos os termos para o mesmo lado) da forma:

$$10x^2 - Cx + 9000 = 0.$$

Queremos, então, o menor valor positivo de C para o qual essa equação tenha ao menos uma solução real positiva. Para que ela tenha solução real, precisamos ter:

$$\Delta = (-C)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 9000 \geq 0.$$

Isso implica $C^2 \geq 360.000$ ou, ainda, $C \geq 600$ (uma vez que C também deve ser positivo). Resta ver se, quando $C = 600$, a equação tem mesmo uma solução positiva. Temos que:

$$10x^2 - 600x + 9000 = 0 \implies x = \frac{-(-600)}{20} = 30.$$

Dessa forma, o custo de cavar o buraco é pelo menos 600 reais, e este valor pode ser realizado fazendo $x = 30\,\text{m}$. $\square$

Solução alternativa. Assim como na primeira solução, temos que o custo C é dado, como função de x, por

$$C = 10x + \frac{9000}{x}.$$

Usando a técnica de completar quadrados, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned} C &= 10\left(x + \frac{900}{x}\right) \\ &= 10\left(\left(\sqrt{x} - \frac{30}{\sqrt{x}}\right)^2 + 60 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ & 10\left(\left(\sqrt{x} - \frac{30}{\sqrt{x}}\right)^2 + 60\right). \end{aligned}$$

Uma vez que $\left(\sqrt{x} - \frac{30}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$ para qualquer valor real positivo de x, sendo igual a zero apenas quando $x = 30$, concluímos que o menor valor possível de C é obtido quando $x = 30$, sendo este menor valor para C igual a $10 \cdot (0 + 60) = 600$ reais. $\square$

Exemplo 4. *Dois comerciantes venderam um certo tipo de tecido ao longo do dia. O segundo comerciante vendeu* 3 *metros a mais do que o primeiro e, no fim do dia, os dois receberam, ao todo,* 35 *reais pelas vendas realizadas. Então, o primeiro disse: "se eu tivesse vendido a meu preço a quantidade que você vendeu, teria apurado* 24,00 *reais". Por sua vez, o segundo respondeu: "e eu teria recebido* 12,50 *pelo tecido que você vendeu". Quais os possíveis valores para a quantidade de metros e o preço pelo qual cada um vendeu o tecido?*

Solução. Vamos chamar de x e y, respectivamente, as metragens que o primeiro e o segundo comerciantes venderam. Também, denotaremos por a e b os preços por metro praticados pelo primeiro e pelo segundo comerciantes, respectivamente. Interpretando o enunciado, obtemos as equações:

$$\begin{cases} y = x + 3, \\ ax + by = 35, \\ ay = 24{,}00, \\ bx = 12{,}50. \end{cases}$$

Das duas últimas equações, temos $a = 24/y$ e $b = 12{,}5/x$. Substituindo tais valores na segunda equação, obtemos:

$$\frac{24x}{y} + \frac{12{,}5y}{x} = 35.$$

Agora, substituindo o valor de y na expressão acima por aquele dado na primeira equação, ficamos com

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{12,5(x+3)}{x} = 35.$$

Multiplicando ambos os lados por $x(x+3)$ e em seguida simplificando o resultado, obtemos:

$$\begin{gathered} 24x^2 + 12{,}5(x+3)^2 = 35x(x+3) \iff \\ 24x^2 + 12{,}5(x^2 + 6x + 9) = 35(x^2 + 3x) \iff \\ 24x^2 + 12{,}5x^2 + 75x + 112{,}5 = 35x^2 + 105x \iff \\ 1{,}5x^2 - 30x + 112{,}5 = 0 \iff \\ x^2 - 20x + 75 = 0. \end{gathered}$$

Resolvendo a equação de segundo grau acima, obtemos facilmente: $\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 75 = 400 - 300 = 100$. Logo $x = \dfrac{20 \pm 10}{2}$, ou seja, $x = 5$ ou $x = 15$. Consideremos esses dois casos separadamente:

Caso $x = 5$: segue que $y = 5 + 3 = 8$, $a = 24/8 = 3$ e $b = 12{,}5/5 = 2{,}5$. Então, o primeiro vendeu 5 metros a 3 reais o metro e o segundo vendeu 8 metros a 2,5 reais o metro. Veja que esses dados também satisfazem a equação $ax + by = 35$, logo, formam uma solução válida.

Caso $x = 15$: temos $y = 15 + 3 = 18$, $a = 24/18 \cong 1{,}33$ e $b = 12{,}5/15 \cong 0{,}83$ reais. Aqui, o primeiro vendeu 15 metros a 1,33 real o metro e o segundo vendeu 18 metros a 0,83 real o metro. Esta também é uma solução válida. □

Exemplo 5 (CFTMG, adaptada). *Sobre a função real $f(x) = (k-2)x^2 + 4x - 5$, indique, dentre os itens abaixo, o(s) verdadeiro(s) e o(s) falso(s):*

(a) O gráfico de f é uma parábola, para todo $k \in \mathbb{R}$.

(b) Se $k = 1$, então $f(x)$ é negativa para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Se $k > 2$, então o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

(d) Se $k = 3$, então $f(-5) = 1$.

Solução. Analisamos cada item a seguir:

(a) Falso! Se escolhermos $k = 2$ o coeficiente de x^2 será nulo, de forma que $f(x) = 4x - 5$ e seu gráfico será uma reta.

(b) Verdadeiro! Para $k = 1$, temos $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ e, nesse caso, o gráfico de f representa uma parábola com concavidade para baixo. Para que ela seja sempre negativa, é necessário que a equação $f(x) = 0$ não tenha raízes reais, ou seja, que $\Delta < 0$. Note que tal ocorre, uma vez que

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4 < 0.$$

(c) Verdadeiro! Se $k > 2$, então $k - 2 > 0$. Dessa forma, o coeficiente de x^2 é positivo, e o gráfico é uma parábola tem concavidade para cima.

(d) Falso! Para $k = 3$, temos $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Logo, $f(-5) = (-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 5 = 25 - 20 - 5 = 0 \neq 1$.

□

Exemplo 6 (CFTMG). *Sobre a função $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5$, indique qual dos itens abaixo é o verdadeiro:*

(a) O domínio de f é $\mathbb{R}$.

(b) A imagem de $x = -1$ é igual a -2.

(c) O conjunto imagem de f é $\{0, 1, 2, 3\}$.

(d) O conjunto imagem de f é $\{-5, -2, 3, 10\}$.

Solução. Na notação $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ representa o domínio de f, enquanto $\mathbb{R}$ representa o contradomínio. Dessa forma, fica claro que o item (a) é falso. Além disso, como -1 não pertence ao domínio de f, temos que o valor de $f(-1)$ não está definido (entende-se que a fórmula $f(x) = x^2 + 2x - 5$ só pode ser aplicada quando x pertence ao domínio da função f). Assim, o item (b) também é falso. Resta descobrir o conjunto imagem de f e, para tanto, aplicamos f a cada valor do domínio:

$$\begin{aligned} f(0) &= -5 \\ f(1) &= 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = -2 \\ f(2) &= 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 3 \\ f(3) &= 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10. \end{aligned}$$

Logo, a imagem é o conjunto $\{-5, -2, 3, 10\}$ e o item (d) é o correto.

Observação: ao calcular $f(0)$ já poderíamos perceber que o item (c) era falso e marcar (d) por eliminação. □

Exemplo 7 (IFAL). *Assinale a alternativa que completa corretamente a frase "A função real $f(x) = x^2 - 4x + 5$":*

(a) não admite zeros reais.

(b) atinge um valor máximo.

(c) tem como gráfico uma reta.

(d) admite dois zeros reais e distintos.

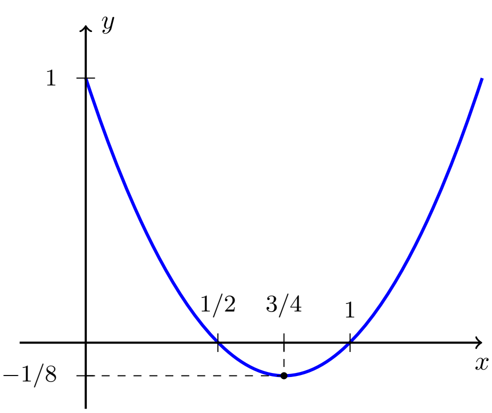
(e) atinge um valor mínimo igual a -1.

Solução. Claramente, os itens (b) e (c) são falsos, já que a função tem como gráfico uma parábola de concavidade voltada para cima (logo, seu gráfico não é uma reta e possui um valor mínimo, mas não um máximo, já que o domínio é $\mathbb{R}$). Para decidir se a função admite zeros reais (e quantos deles existem), devemos olhar para o discriminante:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Logo, a função não admite zeros reais e o item (a) está correto, enquanto que o item (d) é falso. Por fim, apenas por completude, veja que o item (e) é falso, uma vez que o mínimo da função é igual $-\Delta/4a = -(-4)/(4 \cdot 1) = 1$. □

Exemplo 8 (CFTMF, adaptada). *A função real cujo gráfico é representado pela parábola da figura*



é definida por:

(a) $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

(c) $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

(d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Solução. Uma vez que o gráfico da função é uma parábola, ela possui uma lei de formação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Como o gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$, temos $f(0) = 1$, logo, $c = 1$. Podemos ver também pelo gráfico que as raízes da equação $f(x) = 0$ são os números $1/2$ e 1. Assim, a soma das raízes é $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ e seu produto é $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Comparando esses valores com as fórmulas para a soma e o produto das raízes de uma equação de segundo grau, obtemos

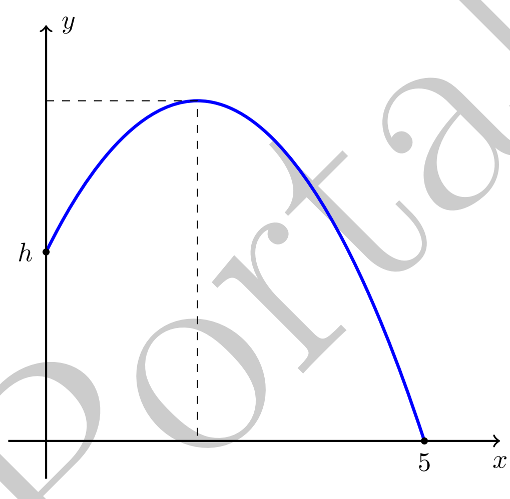
$$\frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

Como $c = 1$, seque que $a = 2$ e, daí, $b = -3$. Logo,

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1,$$

e o item correto é o (d). □

Exemplo 9 (CFTRJ). *Um objeto é lançado do topo de um muro de altura h, atingindo o solo após 5 segundos. A trajetória parabólica do objeto é representada pela equação $y = -0{,}5x^2+bx+2{,}5$, cujo gráfico está apresentado abaixo, onde y indica a altura atingida pelo objeto em relação ao solo, em metros, no tempo x, em segundos.*



(a) *Calcule a altura h (do muro) e o valor do coeficiente b da equação da trajetória.*

(b) *Determine a altura máxima, em relação ao solo, atingida pelo objeto.*

Solução. O valor de h pode ser obtido substituindo-se x por 0 na equação. Assim, $h = -0{,}5 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 2{,}5 = 2{,}5$.

Por outro lado, sabemos que após 5 segundos o objeto encontra-se no solo, ou seja, a uma altura 0. Então, fazendo $x = 5$ devemos obter $y = 0$. Logo,

$$0 = -0{,}5 \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2{,}5,$$

de sorte que $5b = 12{,}5 - 2{,}5 = 10$ ou, ainda, $b = 2$.

Portanto, a trajetória (parabólica) do objeto possui equação

$$y = -0{,}5x^2 + 2x + 2{,}5.$$

A altura máxima do objeto corresponde à coordenada y do vértice dessa parábola, a qual vale:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 2{,}5)}{4 \cdot (-0{,}5)} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$$

Logo, a altura máxima atingida pelo objeto foi de 4,5 m. □

Exemplo 10 (IFSC, adaptada). *A receita R obtida pela venda de um determinado produto é representada pela função $R(x) = -x^2+100x$, onde x é a quantidade de unidades desse produto.*

(i) *Qual a quantidade a ser comercializada para se atingir a receita máxima?*

(ii) *Qual é a receita máxima que pode ser alcançada?*

Solução. Veja que $R(x)$ é uma função quadrática na qual o coeficiente de x^2 é negativo. Dessa forma, essa função atinge, sim, um valor máximo, e esse valor é a ordenada do vértice da parábola que representa o gráfico de $R = R(x)$. Portanto:

(i) A quantidade que gera receita máxima corresponde à abscissa x_v do vértice, ou seja,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-1)} = 50.$$

Logo, para atingir a receita máxima deve-se comercializar 50 unidades.

(ii) A receita máxima é igual à ordenada y_v do vértice, isto é:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0)}{4 \cdot (-1)} = \frac{10.000}{4} = 2.500.$$

Alternativamente, a receita máxima corresponde ao valor $R(x_v) = R(50)$, onde

$$R(50) = -50^2 + 100 \cdot 50 = -2.500 + 5.000 = 2.500.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que o professor reserve dois encontros de 50 minutos para discutir os exercícios aqui reunidos. Ao longo desta aula, usamos por repetidas vezes as fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola. Contudo, é interessante que não se exija apenas que os alunos memorizem essas fórmulas. Sempre que possível, deve-se lembrar como podemos deduzir algumas delas a partir de outras informações mais comumente usadas. Por exemplo, lembre-se de que, na parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, a soma das raízes é $-b/a$. Denotando por (x_v, y_v) as coordenadas do vértices, o fato de que $x_v = -b/2a$ tem relação com o fato de que este valor é igual à metade da soma das raízes (isso é claro no caso em que a raízes são reais, por conta da simetria da parábola, mas também vale quando não houver raízes reais). Por outro lado, no lugar de memorizar a fórmula $y_v = -\Delta/4a$, uma vez calculado x_v podemos calcular $f(x_v)$ usando a definição da função f (como fizemos no último exemplo), obtendo $-\Delta/4a$ como resultado.

As referências abaixo contêm mais exercícios interessantes sobre equações e funções de segundo grau.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.