

Material Teórico - Módulo Função Afim

Noções Básicas

Nono Ano - Ensino Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



PORTAL DA
MATEMÁTICA
OBMEP

1 Função afim: definição e propriedades básicas

Em um material anterior (veja o módulo Funções - Noções básicas, parte 1, exemplo 3), vimos que duas grandezas são chamadas *diretamente proporcionais* se a razão entre elas for uma constante, que chamamos **constante de proporcionalidade**. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. *Quatro amigos foram almoçar em um restaurante de comida por quilo. A tabela a seguir mostra os resultados das pesagens do almoço e o valor pago por cada um. Qual o preço do kg de almoço nesse restaurante?*

“peso” em g	R\$
372	16,74
470	21,15
512	23,04
540	24,30

Solução. Dividindo o valor pago pela massa de comida consumida, obtemos o preço de um grama de almoço. Como esse valor é o mesmo para todos os consumidores, devemos ter as seguintes igualdades:

$$\frac{16,74}{372} = \frac{21,15}{470} = \frac{23,04}{512} = \frac{24,30}{540} = a$$

De fato, executando cada uma das divisões acima, obtemos sempre o mesmo valor: $a = 0,045$ R\$/g, que é o preço por grama de comida. Uma vez que $1\text{Kg} = 1000\text{g}$, concluímos que o preço por quilograma de comida é esse valor multiplicado por 1000, ou seja, 45 reais. \square

Na tabela acima, os valores da segunda coluna podem ser obtidos a partir dos valores da primeira coluna, multiplicando-os por $a = 0,045$. Obtemos, assim, uma *relação de dependência*

$$f(x) = ax \quad (1)$$

com $a = 0,045$, onde x denota a massa de comida (em gramas) e $f(x)$ o valor pago por ela, em reais.

Claramente, na situação do exemplo apenas valores inteiros positivos de x podem ser considerados. Contudo, se fizermos x variar em \mathbb{R} , obteremos a *função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0,045 \cdot x$. Esse tipo de função é suficientemente importante para merecer uma definição que o destaque.

Definição 2. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuja lei de formação é dada como em (1), com $a \neq 0$, é chamada **função linear**.*

A escolha do adjetivo *linear* pode ser justificada observando-se o gráfico de f . Na figura 1 podemos ver os pontos $A = (372; 16,74)$, $B = (470; 21,15)$, $C = (512; 23,04)$ e $D = (540; 24,30)$. Esses quatro pontos pertencem a uma mesma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

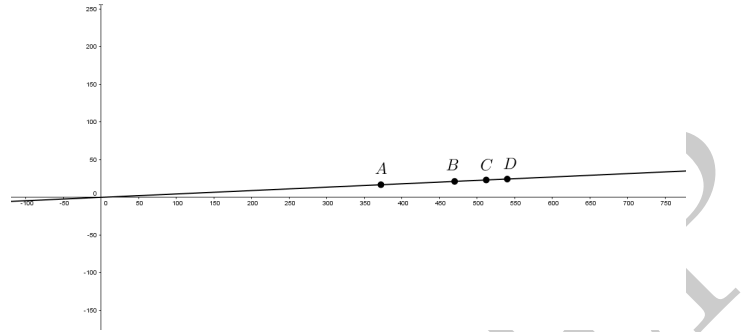


Figura 1: os pontos A, B, C e D são colineares.

Uma função linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades:

- (i) $f(x + x') = f(x) + f(x')$, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (ii) Para cada $c \in \mathbb{R}$ constante, tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, se $x, x' \in \mathbb{R}$, então $f(x + x') = a(x + x') = ax + ax' = f(x) + f(x')$, e isso justifica a afirmação (i). Por outro lado, se $c \in \mathbb{R}$, então $f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x)$, o que justifica a afirmação (ii).

Reciprocamente, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (ii), então $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$, com $a = f(1)$. Em particular, para funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , a condição (ii) implica a condição (i).

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + b$, onde $b \in \mathbb{R}$ é uma constante, é chamada de *translação*.

Cabe observarmos que, em geral, uma translação *não* é uma função linear, pois, se $c \neq 1$, então

$$f(cx) = cx + b \neq cx + cb = cf(x).$$

O efeito geométrico da translação dada por $f(x) = x + b$ é “mover” um ponto x situado na reta real. Realmente, se $b > 0$, o ponto $f(x)$ está b unidades à direita de x ; se $b < 0$, o ponto $f(x)$ está b unidades à esquerda de x ; por fim, se $b = 0$, então os pontos $f(x)$ e x coincidem.

Como já vimos no material *Funções - Noções Básicas, parte 2*, página 4, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é chamada *função identidade*. Essa é a única função linear que também é uma translação.

A definição a seguir generaliza a classe de funções vistas acima.

Definição 3. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, é chamada de **função afim**.*

Toda função linear é uma função afim, com $a \neq 0$ e $b = 0$. Toda translação é uma função afim, com $a = 1$. Se $a = 0$, a função afim pode ser escrita como $f(x) = b$, e a chamamos de **função constante**.

Reciprocamente, toda função afim que não é constante pode ser construída a partir de funções lineares e translações, da seguinte maneira: seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Então $f = T \circ L$, onde $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a translação dada por $T(x) = x + b$ e $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função linear dada por $L(x) = ax$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$(T \circ L)(x) = T(L(x)) = T(ax) = ax + b = f(x).$$

Exemplo 4. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **involução** se f não é a função identidade e $f(f(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos obter todas as funções afins que são involuções. Para tanto, seja $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e suponhamos que $f(f(x)) = x$, também para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(ax + b) = x$, isto é, $a(ax + b) + b = x$. Dessa igualdade segue que

$$a^2x + (ab + b) = x, \quad (2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, se $x = 0$, então $ab + b = 0$, o que implica $b = 0$ ou $a = -1$. Consideremos, pois, esses dois casos:

(i) Se $b = 0$, (2) pode ser reescrita como $a^2x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = 1$, encontramos $a^2 = 1$ e, daí, $a = 1$ ou $a = -1$. Se $a = 1$, então $f(x) = x$ seria a função identidade, o que não é permitido para involuções. Logo, $a = -1$ e $f(x) = -x$.

(ii) Se $a = -1$, então (2) é trivialmente satisfeita, independentemente do valor de b . Logo, $f(x) = -x + b$. (Observe que esse caso, no final das contas, inclui o caso anterior.)

Se A é um subconjunto não vazio de \mathbb{R} , uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ também é chamada de função afim. Analogamente, repetimos a mesma nomenclatura definida acima para translações, funções lineares, etc., no caso de funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Veja um exemplo relevante nesse sentido.

Exemplo 5. A função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(n) = an + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma função afim cujo domínio é o conjunto \mathbb{N} dos números naturais. A imagem de f forma a seqüência $f(1), f(2), f(3), \dots$, tal que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma:

$$f(n+1) - f(n) = a(n+1) + b - (an + b) = a.$$

Uma seqüência desse tipo é chamada de **progressão aritmética (PA) de razão a** . O termo $f(1) = a + b$ é chamado **termo inicial** da PA. Denotando $a_n = f(n)$, temos que $a_1 = f(1) = a + b$, isto é, $b = a_1 - a$. Logo,

$$a_n = f(n) = an + b = an + a_1 - a,$$

e podemos escrever

$$a_n = a_1 + (n-1)a,$$

a qual é denominada a **fórmula do termo geral da PA**.

2 Caracterização de funções afins

Nesta seção, vamos exibir uma propriedade que caracteriza as funções afins. Também veremos que é fácil decidir quando uma função afim é *crescente* ou *decrecente*, de acordo com a definição a seguir.

Definição 6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **crescente** se o valor de $f(x)$ cresce quando x cresce, ou seja, se para $x, x' \in \mathbb{R}$, tivermos

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **decrecente** se o valor de $f(x)$ decresce quando x cresce, ou seja, se para $x, x' \in \mathbb{R}$, tivermos

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$

Lembremos que, dados $x, x' \in \mathbb{R}$, escrevemos $x < x'$ para indicar que $x' = x + h$, com $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. O número positivo h , que devemos somar a x para obter x' , é chamado **incremento**.

O Teorema 7 a seguir caracteriza as funções afins em termos da razão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (3)$$

onde h é um incremento arbitrário. A razão (3) é chamada **taxa de variação** da função f no ponto x , para um incremento h . Podemos ver a taxa de variação como uma medida da “velocidade” de crescimento de uma função. Em geral, essa taxa de variação depende de x , mas para funções afins ela é constante, como veremos a seguir.

Teorema 7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(a) f é uma função afim se, e somente se, a taxa de variação

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é constante, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Neste caso, temos $f(x) = ax + b$, onde a é o valor constante da taxa de variação e $b = f(0)$.

(b) Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, $a > 0$, e é decrescente se, e somente se, $a < 0$.

Prova.

(a) Assumindo que f é uma função afim, podemos escrever $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} \\ &= \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} \\ &= \frac{ah}{h} = a. \end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que a taxa de variação de f é constante e igual a a , temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Em particular, se $x = 0$, obtemos

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = a \Rightarrow f(h) - f(0) = ah.$$

Da mesma forma, temos

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = a,$$

para todos $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$ (observe que h é o incremento para passarmos de $x-h$ a x). Em particular, se $x = 0$, obtemos

$$\frac{f(0) - f(-h)}{h} = a \Rightarrow f(-h) - f(0) = -ah.$$

Chamando $f(0)$ de b , obtemos $f(h) = ah + b$ e $f(-h) = a(-h) + b$, para todo $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Logo, escrevendo x no lugar de h e $-h$ na lei de formação de f , obtemos $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (veja que tal fórmula vale também quando $x = 0$, uma vez que $f(0) = b$).

(b) Seja $f(x) = ax + b$. Suponhamos que f crescente e consideremos $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Então $x < x+h$ e, por f ser crescente, $f(x) < f(x+h)$, ou seja, $f(x+h) - f(x) > 0$. Assim,

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

pois o numerador e o denominador dessa fração são positivos.

Reciprocamente, se $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, então

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = a > 0$$

para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}$, onde $x' = x+h$. Se $x < x'$, então $x' - x > 0$ e

$$f(x') - f(x) = a(x' - x) > 0,$$

pois o segundo membro é o produto de dois números positivos. Logo, $f(x) < f(x')$ e, portanto, f é crescente.

A demonstração de que f é decrescente se, e somente se, $a < 0$ é análoga e convidamos o leitor a escrevê-la. \square

Observação 8. Uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem taxa de variação igual a zero se, e somente se, é constante.

Veremos agora que a composição de funções afins ainda é uma função afim.

Teorema 9. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções afins dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, a composta $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é uma função afim, dada por

$$(f \circ g)(x) = acx + \overbrace{(ad + b)}^{f(d)}.$$

Além disso, se f e g forem ambas crescentes ou ambas decrescentes, então $f \circ g$ é crescente. Se uma delas for crescente e a outra for decrescente, então $f \circ g$ é decrescente.

Prova. A primeira parte é um cálculo imediato:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(cx + d) \\ &= a(cx + d) + b \\ &= acx + (ad + b). \end{aligned}$$

Observe que $f(d) = ad + b$.

Para a segunda parte, o Teorema 7 garante que, se f e g são ambas crescentes ou ambas decrescentes, então a e c têm um mesmo sinal (são ambos positivos ou ambos negativos). Em qualquer caso, temos $ac > 0$, e a fórmula para $(f \circ g)(x)$, juntamente com o Teorema 7, garante que $f \circ g$ é crescente. Se uma das funções é crescente e a outra é decrescente, então a e c têm sinais contrários, logo $ac < 0$ e $f \circ g$ é decrescente. \square

O exemplo a seguir generaliza o teorema anterior. Deixamos a verificação dos detalhes para o leitor.

Exemplo 10. Considere as funções $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde, para cada $1 \leq i \leq n$, temos $f_i(x) = a_i x + b_i$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. A composta $F = f_1 \circ \dots \circ f_n$, obtida aplicando-se sucessivamente as funções f_n, \dots, f_1 , é dada por

$$F(x) = (a_1 \dots a_n)x + f_1(f_2(\dots f_n(b_n) \dots)),$$

onde $f_1(f_2(\dots f_n(b_n) \dots)) = (f_1 \circ \dots \circ f_n)(b_n)$ é o resultado da aplicação sucessiva das funções f_n, \dots, f_1 ao coeficiente b_n .

Ademais, se, dentre as funções f_1, \dots, f_n o número de funções decrescentes for par, então o produto $a_1 \dots a_n$ tem um número par de fatores negativos, sendo portanto positivo, e a composta $F = f_1 \circ \dots \circ f_n$ é crescente. Caso o número de funções decrescentes seja ímpar, o produto $a_1 \dots a_n$ tem um número ímpar de fatores negativos, sendo portanto negativo, e a composta é decrescente.

3 Gráfico de uma função afim

Lembremos que o gráfico de uma função $f : A \rightarrow B$, denotado por $\text{gr}(f)$, é o subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, formado pelos pares ordenados $(a, f(a))$, com $a \in A$. No caso em que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, é possível identificar $\text{gr}(f)$ com um conjunto de pontos do plano cartesiano, fazendo

com que o gráfico $\text{gr}(f)$ passe a ser uma representação geométrica da função f .

Em uma aula anterior (Funções - Noções Básicas, parte 2, exemplo 4, página 2) vimos que o gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x + 1$, é uma reta. Nesta seção, vamos mostrar que o gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é uma reta, e daremos interpretações geométricas para os coeficientes a e b . Sugerimos que o leitor releia agora o exemplo exibido na aula anterior, citada acima, pois repetiremos o mesmo argumento lá utilizado.

Teorema 11. *O gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma reta.*

Prova. Consideremos os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, ambos pertencentes ao gráfico de f . Supondo, primeiro, que a função f é afim, dada por $f(x) = ax + b$, vamos mostrar que um ponto qualquer $(x, f(x))$ do gráfico de f está sobre a reta que passa por $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$ (veja a figura 2).

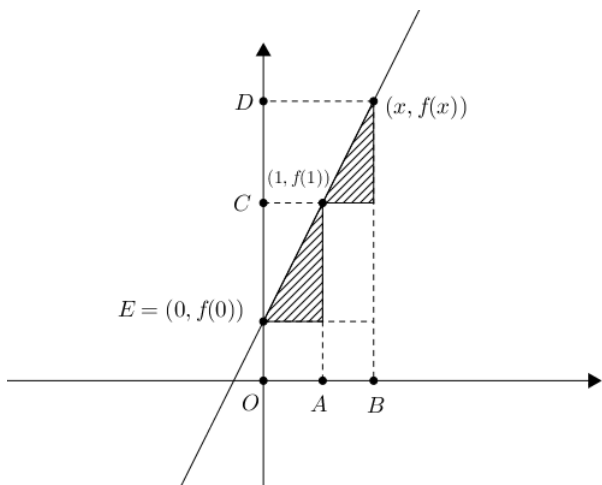


Figura 2: o gráfico de uma função afim é uma reta.

Observando a figura acima, vemos que $\overline{OA} = 1 - 0 = 1$, $\overline{EC} = f(1) - f(0) = a \cdot 1 + b - a \cdot 0 - b = a$, $\overline{AB} = x - 1$ e $\overline{CD} = f(x) - f(1) = ax + b - a - b = a(x - 1)$. Assim,

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{a}{1} = a$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

de sorte que os dois triângulos retângulos tracejados na figura 2 têm catetos proporcionais. Pelo caso LAL de semelhança de triângulos, tais triângulos são semelhantes.

Em particular, os ângulos formados pelas hipotenusas dos mesmos com a horizontal são congruentes, e isso significa que os pontos $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$ são colineares. Por fim, como $(x, f(x))$ é um ponto qualquer do gráfico, concluímos que o gráfico de f é a reta que passa pelos pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{gr}(f)$ é uma reta. Então, os pontos $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$ são colineares, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, os triângulos retângulos tracejados na figura 2 são semelhantes, dessa vez pelo caso AA de semelhança. Portanto, vale a seguinte relação entre seus catetos:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

isto é,

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Essa última igualdade, resolvida para $f(x)$, implica

$$f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0).$$

Por fim, denotando $a = f(1) - f(0)$ e $b = f(0)$, obtemos $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, f é uma função afim. \square

Observação 12. *Sabemos, da geometria plana, que dois pontos determinam uma reta. Como o gráfico de uma função afim é uma reta, podemos afirmar que uma função afim fica totalmente determinada se soubermos as imagens de dois dos elementos de seu domínio. Na demonstração do Teorema 11, usamos os pontos $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$ para determinar a reta que é o gráfico de f .*

A seguir, veremos que os coeficientes a e b da função afim dada por $f(x) = ax + b$ têm significados geométricos. Primeiramente, como $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, o coeficiente b é igual à ordenada do ponto $(0, f(0))$, onde o gráfico de f intersecta o eixo y . Por essa razão, chamamos b de **coeficiente linear** do gráfico de f (figura 3).

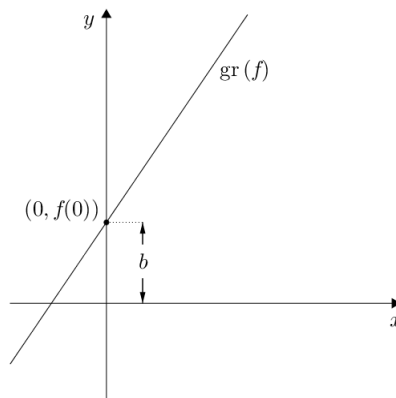


Figura 3: o coeficiente linear.

Consideremos, agora, os pontos $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$ sobre $\text{gr}(f)$. O ângulo θ que o gráfico de f forma com a horizontal é ângulo interno do triângulo retângulo ABC (veja a figura 4). A tangente desse ângulo é, por definição,

$$\text{tg } \theta = \frac{f(1) - f(0)}{1} = f(1) - f(0) = a + b - b = a.$$

Dessa forma, o coeficiente a é igual à tangente do ângulo que a reta $\text{gr}(f)$ forma com a horizontal. Por isso chamamos a de **coeficiente angular** do gráfico de f .

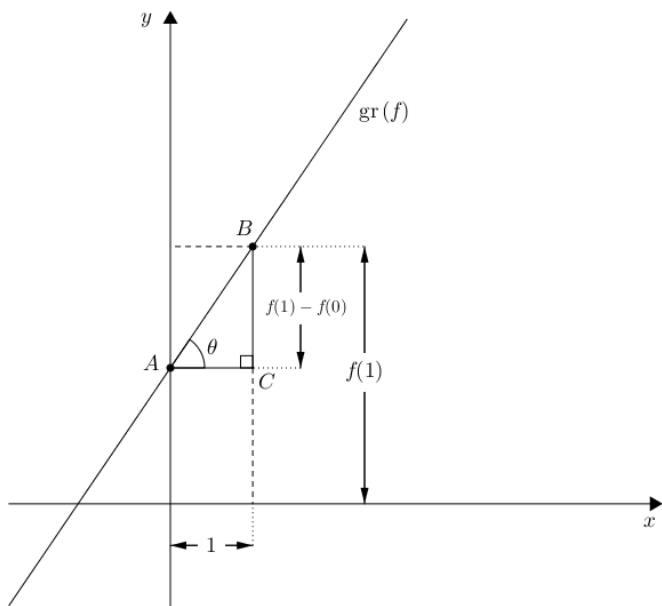


Figura 4: o coeficiente angular.

Alguns casos particulares merecem atenção especial.

- (1) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, dada por $f(x) = b$, então $\text{tg } \theta = a = 0$, o que implica $\theta = 0$. Logo, o seu gráfico é uma reta horizontal.
- (2) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função identidade, dada por $f(x) = x$, então $\text{tg } \theta = a = 1$ o que implica $\theta = 45^\circ$. Isso significa que o gráfico de f é a bissetriz dos ângulos retos que formam o primeiro e o terceiro quadrantes (veja a aula: *Funções - Noções Básicas, parte 2*). Dizemos, pois, que o gráfico da função identidade é a *bissetriz dos quadrantes ímpares*.
- (3) Uma reta *vertical* r não pode ser gráfico de uma função, pois dois pontos quaisquer dessa reta têm a mesma abscissa. Sendo assim, se fosse $r = \text{gr}(f)$, dois pontos distintos de r seriam do tipo (x, y) e (x, y') , com $y \neq y'$. Porém $(x, y), (x, y') \in \text{gr}(f)$ implicam $y = f(x)$ e $y' = f(x)$, ou seja, x teria duas imagens diferentes, o que não é possível se f for uma função.

Observação 13. No caso em que o domínio de uma função afim f é um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, o gráfico de f é um subconjunto da reta que é gráfico de f , com o domínio estendido a todos os reais.

Exemplo 14. O gráfico da função $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$ é o segmento de reta que liga os pontos $(1, f(1)) = (1, 2)$ a $(2, f(2)) = (2, 5)$ (figura 5). Este segmento de reta está contido na reta $r = \text{gr}(F)$, onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 3x - 1$, estende o domínio da função f a todos os números reais.

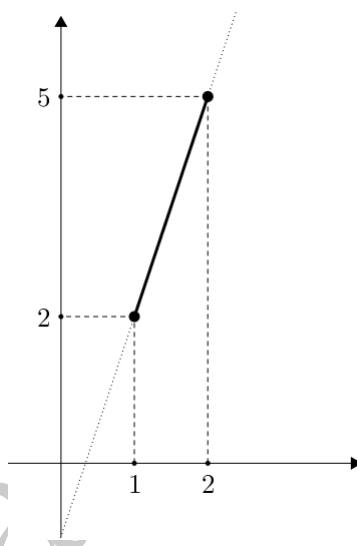


Figura 5: o segmento de reta que é gráfico da função afim $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$.

Terminamos este material apresentando um exemplo que ilustra uma aplicação de funções afins que está além do material de que dispomos. Tal aplicação diz respeito ao problema de encontrar a função afim que melhor aproxima uma função dada, num entorno suficientemente pequeno de um ponto de seu domínio. Historicamente, o desenvolvimento das técnicas para obter essa *melhor aproximação* deu origem ao *Cálculo Diferencial*, área da Matemática de importância central para a ciência moderna.

Exemplo 15. Seja \mathbb{R}_+ o conjunto dos números reais não negativos. As funções $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{x}{4} + 1$, têm seus gráficos esboçados na figura 6. Nas proximidades do ponto de tangência $(4, 2)$, a distância entre os dois gráficos é pequena. Assim, para valores de x próximos à abscissa do ponto de tangência, isto é, para valores de x próximos de 4, temos que $\sqrt{x} = f(x)$ pode ser razoavelmente bem aproximado por $g(x)$.

Por exemplo, $\sqrt{5} = f(5) \cong g(5) = \frac{5}{4} + 1 = 2,25$. Usando uma calculadora, você pode verificar que $\sqrt{5} \cong 2,236$, com

três casas decimais exatas. Isso significa que $g(5)$ é uma aproximação de $\sqrt{5}$ com uma casa decimal exata.

Outro exemplo: $g(4,5) = \frac{4,5}{4} + 1 = 2,125$. Usando novamente uma calculadora, podemos verificar que $f(4,5) = \sqrt{4,5} \cong 2,121$. Logo, $g(4,5)$ é uma aproximação de $\sqrt{4,5}$ com duas casas decimais exatas.

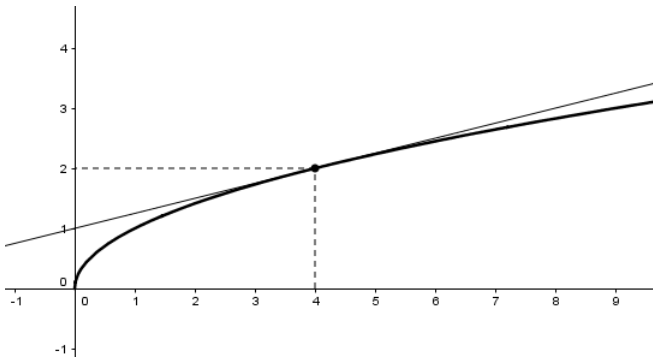


Figura 6: os gráficos das funções f e g . Note que a reta tangencia a curva no ponto $(4, 2)$.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Funções afins são importantes por dois motivos principais: primeiro, seu estudo é relativamente simples e podemos dizer muito sobre uma função afim conhecendo apenas seus coeficientes, ou sua ação em dois elementos distintos do seu domínio. Segundo, é possível estudar funções mais gerais usando funções afins como uma primeira aproximação (essa é a ideia central do Cálculo Diferencial). Evidentemente esse segundo motivo é mais difícil de ser explicado a alunos do ensino básico, que nunca tiveram contato com o Cálculo, mas alguns exemplos, como o exemplo 15, podem ajudar o estudante a compreender a utilidade das funções afins como ferramenta de aproximação.

Faça experiências com seus alunos envolvendo aproximações de raízes quadradas ou raízes cúbicas. Você vai precisar um pouco de Cálculo Diferencial (derivadas) para elaborar os exemplos, mas não precisa falar sobre Cálculo para os alunos. Uma vez obtida a função afim que aproxima uma função dada em torno de um ponto (como no exemplo 15), você pode usar um software de geometria dinâmica para traçar os gráficos e, visualmente, checar com seus alunos a proximidade dos dois gráficos em torno do ponto em questão (como na figura 6).

Algum aluno mais curioso pode questionar como obter a expressão da função afim cujo gráfico tangencia o gráfico da função dada (no exemplo 15, como encontramos $g(x) = \frac{x}{4} + 1$ a partir de $f(x) = \sqrt{x}$?). Nesse caso, fale sobre a existência de uma técnica para descobrir a lei de formação

de g (a derivação). Dependendo do nível da turma, você pode citar o Teorema 7 e dizer que a derivada é dada pela expressão (3) da taxa de variação, mas que, para funções mais gerais, essa taxa de variação não é constante, como no caso da função afim, o que dificulta o seu tratamento em nível elementar.

O estudo da taxa de variação da função afim, como exibido neste texto, de sua interpretação geométrica como coeficiente angular e de aplicações como a do exemplo 15, são excelentes oportunidades para se falar sobre um dos conceitos fundamentais do Cálculo (e da ciência moderna) – o de derivada. Nesse caso, podemos fazê-lo em um contexto elementar (isto é, sem o uso de limites), devido à simplicidade das funções afins.

As referências listadas a seguir discutem funções em geral, e afins em particular. As referências [1] e [3] trazem vários problemas simples envolvendo funções afins, ao passo que a referência [2] estende o estudo de funções até os rudimentos do Cálculo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 3: Introdução à Análise*, segunda edição. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. G. Iezzi. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1: Conjuntos Numéricos e Funções*. Editora Atual, São Paulo, 2013.
3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, volume 1*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.