Material Teórico - Módulo Progressões Geométricas

Exercícios de Aprofundamento

Primeiro Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios de Aprofundamento

Apresentamos abaixo mais alguns exemplos, a fim de exercitar o material sobre PGs abordado nas aulas anteriores.

Exemplo 1. *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu ao rei uma recompensa de 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade anterior a cada nova casa. Sabendo que o tabuleiro tem 64 casas e que um grão de trigo pesa aproximadamente $0,00526g$, mostre que o rei teria que dar ao inventor mais de $8 \cdot 10^{10}$ toneladas de trigo*[1].

Solução. Observe que a quantidade de grãos de trigo pedida pelo inventor do xadrez é dada pela soma dos termos da PG

$$(1, 2, 4, \ldots, 2^{63}).$$

Portanto, vamos primeiro calcular a soma dos 64 termos da PG que possui primeiro termo igual a 1 e razão igual a 2, ou seja, a soma:

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63}.$$

Utilizando a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita, obtemos:

$$S = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Agora, o peso de cada grão de trigo é

$$0,00526\text{g} = 526 \cdot 10^{-11}\text{t} > 512 \cdot 10^{-11}\text{t} = 2^9 \cdot 10^{-11}\text{t}.$$

Portanto, o peso dos grãos de trigo pedidos pelo inventor do xadrez é, em toneladas, maior que

$$2^9 \cdot 10^{-11}(2^{64} - 1) = \frac{2^{73} - 2^9}{10^{11}} \cong \frac{2^{73}}{10^{11}}.$$

Por fim, como $2^{10} > 10^3$, temos

$$2^{40} = (2^{10})^4 > (10^3)^4 = 10^{12},$$

de sorte que

$$\frac{2^{73}}{10^{11}} = \frac{2^{40}}{10^{12}} \cdot 8 \cdot (2^{10})^3 \cdot 10 > 8 \cdot 10^{10}.$$

□

Exemplo 2. *Seja dado $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Mostre que

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

[1] A produção mundial atual de trigo é de cerca de $\frac{1}{2} \cdot 10^9$ toneladas.

(b) Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma

$$1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Solução.
(a) Temos:

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{n} &= 1 + 10 + 100 + \cdots + 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}\\ &= 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}\\ &= \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}.\end{aligned}$$

(b) Seja

$$S = 1 + 11 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Utilizando o item (a), obtemos:

$$\begin{aligned}S &= \frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \cdots + \frac{10^n - 1}{9}\\ &= \frac{10}{9} + \frac{10^2}{9} + \cdots + \frac{10^n}{9}\\ &\quad - \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9}\right)}_{n \text{ parcelas}}.\end{aligned}$$

Agora, note que a sequência

$$\left(\frac{10}{9}, \frac{10^2}{9}, \ldots, \frac{10^n}{9}\right)$$

é uma PG de razão 10. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{10}{9} + \frac{10^2}{9} + \cdots + \frac{10^n}{9} &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1}\right)\\ &= \frac{10^{n+1} - 1}{81}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}1 + 11 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n} &= \frac{10^{n+1} - 1}{81} - \frac{n}{9}\\ &= \frac{10^{n+1} - 9n - 1}{81}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (Macedônia). *Em uma PA não constante de números reais, o quociente entre o primeiro termo e a razão é um número irracional. prove que não há três termos dessa PA que estejam em PG.*

Solução. Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma PA não constante de razão r, tal que $\frac{a_1}{r} \notin \mathbb{Q}$.

Suponha, por contradição, que há três termos dessa PA que estão em PG. Vamos denotar esses três termos por

a_m, a_n e a_p, em que m, n e p são inteiros positivos com $m < n < p$. Então, temos a relação

$$a_n^2 = a_m a_p. \qquad (1)$$

Por outro lado, pela fórmula do termo geral para PAs, temos:

$$a_m = a_1 + (m-1)r,$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

e

$$a_p = a_1 + (p-1)r.$$

Substituindo tais fórmulas para a_m, a_n e a_p em (1), obtemos:

$$(a_1 + (n-1)r)^2 = (a_1 + (m-1)r)\,(a_1 + (p-1)r)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \cancel{a_1^2} + 2a_1(n-1)r + (n-1)^2r^2 = \\ & = \cancel{a_1^2} + (m-1)a_1r + (p-1)a_1r + (m-1)(p-1)r^2 \\ \Longrightarrow \quad & 2a_1(n-1)r + (n-1)^2r^2 = \\ & = (m-1)a_1r + (p-1)a_1r + (m-1)(p-1)r^2. \end{aligned}$$

Dividindo os dois membros da última equação acima por r^2 e utilizando um pouco de Álgebra elementar, obtemos:

$$\frac{a_1}{r}(2n - m - p) = (m-1)(p-1) - (n-1)^2.$$

Consideremos, agora, dois casos separadamente:

(i) Se $2n - m - p \neq 0$, então

$$\frac{a_1}{r} = \frac{(m-1)(p-1) - (n-1)^2}{2n - m - p} \in \mathbb{Q}.$$

Portanto, temos uma contradição às hipóteses do problema.

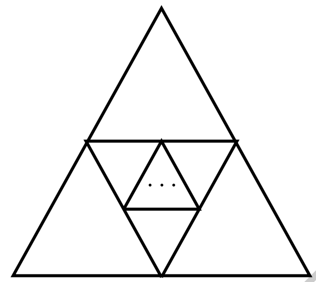
(ii) Se $2n - m - p = 0$, teríamos

$$n = \frac{m+p}{2} \Longrightarrow 2a_n = a_m + a_p,$$

donde seguiria que (a_m, a_n, a_p) também é uma PA. Logo, $a_m = a_n = a_p$ (prove isto!), e assim $r = 0$, o que também não pode acontecer. □

Exemplo 4. *Os lados de um triângulo equilátero medem l. Unindo os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, obtém-se infinitos triângulos equiláteros. Calcule a soma das áreas de todos eles.*

Solução. Observe que os lados do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos vértices do triângulo de lados iguais a l são iguais a $\frac{l}{2}$. Pelo mesmo motivo, os lados do terceiro triângulo são iguais a $\frac{l}{4}$, e assim por diante. Dessa



forma, os lados do $n-$ésimo triângulo equilátero são dados por $\frac{l}{2^{n-1}}$.

Agora, invocando a fórmula para o cálculo da área de um triângulo equilátero de lado l, vemos que as áreas dos triângulos descritos acima formam a PG:

$$\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \frac{l^2\sqrt{3}}{16}, \ldots, \frac{l^2\sqrt{3}}{4^n}, \ldots\right).$$

Observe que tal PG tem razão $\frac{1}{4}$, de sorte que realmente faz sentido calcularmos a soma de seus infinitos termos.

Então, aplicando a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita, obtemos que a soma das áreas dos triângulos é dada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l^2\sqrt{3}}{4^n} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{3}.$$

□

Exemplo 5. *Mostre que se $(a_1, a_2, \ldots)$ é uma PG com $a_m = a$, $a_n = b$ e $a_p = c$, então*

$$a^{n-p}b^{p-m}c^{m-n} = 1.$$

Solução. Seja q a razão da PG em questão. Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG, obtemos:

$$a = a_1q^{m-1}, \quad b = a_1q^{n-1} \ \text{ e } \ c = a_1q^{p-1}.$$

Assim, utilizando as regras usuais de potenciação e um pouco de Álgebra elementar, obtemos:

$$\begin{aligned} a^{n-p}b^{p-m}c^{m-n} &= \left(a_1q^{m-1}\right)^{n-p}\left(a_1q^{n-1}\right)^{p-m}\left(a_1q^{p-1}\right)^{m-n} \\ &= a_1^{n-p+p-m+m-n} \cdot q^{(m-1)(n-p)} \cdot \\ &\quad \cdot q^{(n-1)(p-m)} \cdot q^{(p-1)(m-n)} \\ &= a_1^0 q^{(m-1)(n-p)+(n-1)(p-m)+(p-1)(m-n)} \\ &= q^0 = 1. \end{aligned}$$

□

Exemplo 6 (ITA)**.** *A soma dos cinco primeiros termos de uma PA de razão r é 50 e a soma dos termos de uma PG infinita de razão q é 12. Suponha que as progressões têm o mesmo termo inicial e que esse termo é menor do que 10. Supondo, ainda, que $q = r^2$, calcule a soma dos quatro primeiros termos da PG.*

Solução. Denotemos por $(a_1, a_2, \ldots)$ a PA e por $(b_1, b_2, \ldots)$ a PG. Assim, temos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50 &\Rightarrow 5a_1 + 10r = 50 \\ &\Rightarrow a_1 + 2r = 10. \end{aligned}$$

Por outro lado, invocando a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita, obtemos:

$$\frac{b_1}{1-q} = 12 \Rightarrow b_1 = 12 - 12q.$$

Agora, utilizando o fato que as progressões têm o mesmo termo inicial e $q = r^2$, segue que

$$10 - 2r = a_1 = b_1 = 12 - 12q = 12 - 12r^2$$

ou, o que é o mesmo,

$$12r^2 - 2r - 2 = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau, obtemos $r = \frac{1}{2}$ e $r = -\frac{1}{3}$. O caso $r = -\frac{1}{3}$ não se aplica, pois isso acarretaria

$$a_1 = 10 - 2r = 10 + \frac{2}{3} > 10.$$

Portanto,

$$r = \frac{1}{2} \text{ e } q = r^2 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$b_1 = 12 - 12q = 12 - 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 - 3 = 9,$$

$b_2 = \frac{9}{4}$, $b_3 = \frac{9}{16}$ e $b_4 = \frac{9}{64}$. Finalmente, obtemos:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = \frac{765}{64}.$$

□

Dicas para o Professor

Recomendamos que seja utilizada uma sessão de 50 minutos para desenvolver os exemplos contidos nesse material. Na primeira metade da sessão, sugerimos que o professor estimule os alunos a pensarem nos problemas propostos, possivelmente dando dicas à medida que perceber suas dificuldades. As referências [1] e [2] contém vários outros problemas propostos, de calibre igual ou superior aos colecionados aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 1: Números Reais*, 2ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. G. Iezzi, S. Hazzan. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* São Paulo, Atual Editora, 2012.