Material Teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas

Resolução de Exercícios: Expressões Numéricas

Oitavo Ano

Prof. Ulisses Lima Parente

Portal da Matemática
OBMEP

Exemplo 1. *Simplificando a expressão numérica*

$$2^6+2^6+2^6+2^6-4^4$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2^6+2^6+2^6+2^6-4^4 &= 4\cdot 2^6-\left(2^2\right)^4 \\ = \quad 2^2\cdot 2^6-2^{2\cdot 4} &= 2^8-2^8=0. \end{aligned}$$

Exemplo 2. *Sabendo que* $\sqrt[5]{x^3}=2015^2$, $\sqrt[4]{y^9}=2015^3$ *e* $\sqrt[3]{z^7}=2015^4$, *escreva o número* $(x\cdot y\cdot z)^{21}$ *como uma potência de base* 2015 *e expoente inteiro.*

Solução. Veja que

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^3}=2015^2 &\implies x^{\frac{3}{5}}=2015^2 \implies \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}=\left(2015^2\right)^{\frac{5}{3}} \\ &\implies x=2015^{\frac{10}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{y^9}=2015^3 &\implies y^{\frac{9}{4}}=2015^3 \implies \left(y^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}=\left(2015^3\right)^{\frac{4}{9}} \\ &\implies y=2015^{\frac{12}{9}}=2015^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z^7}=2015^4 &\implies z^{\frac{7}{3}}=2015^4 \implies \left(z^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}=\left(2015^4\right)^{\frac{3}{7}} \\ &\implies z=2015^{\frac{12}{7}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (x\cdot y\cdot z)^{21} &= \left(2015^{\frac{10}{3}}\cdot 2015^{\frac{4}{3}}\cdot 2015^{\frac{12}{7}}\right)^{21} \\ &= \left(2015^{\frac{10}{3}}\right)^{21}\cdot\left(2015^{\frac{4}{3}}\right)^{21}\cdot\left(2015^{\frac{12}{7}}\right)^{21} \\ &= 2015^{70}\cdot 2015^{28}\cdot 2015^{36}=2015^{134}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3. *Se* $\frac{p}{q}$ *é a fração irredutível equivalente a* $\frac{6,888...}{2,444...}$, *calcule o valor de* $p+q$.

Solução. Fazendo $a=6,888\ldots$ e $b=6,888\ldots$, temos

$$\begin{array}{rcc} 10a &=& 68,888\ldots \\ -a &=& -6,888\ldots \\ \hline \Rightarrow 9a &=& 62 \\ \Rightarrow a &=& \dfrac{62}{9} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcc} 10b &=& 24,444\ldots \\ -b &=& -2,444\ldots \\ \hline \Rightarrow 9b &=& 22 \\ \Rightarrow a &=& \dfrac{22}{9}. \end{array}$$

Daí, segue que

$$\frac{6,888\ldots}{2,444\ldots}=\frac{\frac{62}{9}}{\frac{22}{9}}=\frac{62}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{9}}{22}=\frac{62}{22}=\frac{31}{11}.$$

Portanto, $p=31$ e $q=11$ e, assim, $p+q=42$. $\square$

Exemplo 4. *Simplifique a expressão*

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Solução. Inicialmente, observe que, para números reais a e b, temos

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b) \\ &= a^2-ab+ba-b^2 \\ &= a^2-b^2. \end{aligned}$$

Agora, utilizando duas vezes a igualdade

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

juntamente com as propriedades de radiciação, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}= \\ =\ &\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} \\ =\ &\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2} \\ =\ &\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}} \\ =\ &\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ =\ &\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1 \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5. *Simplifique a expressão*

$$\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}+\frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}.$$

Solução. Utilizando várias vezes as propriedades de potenciação estudadas, obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}+\frac{2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}= \\ =\ &\frac{2^{2003}\cdot 9^{1001}+2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{\left(2^{2003}+2^{2002}\right)\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{(2+1)\cdot 2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{3\cdot 2^{2002}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{3\cdot 2^{2002}\cdot\left(3^2\right)^{1001}}{\left(2^2\right)^{1001}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{3\cdot 2^{2002}\cdot 3^{2002}}{2^{2002}\cdot 3^{2003}} \\ =\ &\frac{2^{2002}\cdot 3^{2003}}{2^{2002}\cdot 3^{2003}}=1. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 6. *Resolva a expressão numérica*

$$\left(\frac{3^{11}+3^9}{10}\right)^{0,333\ldots}.$$

Solução. Fazendo $a = 0,333\ldots$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} 10a & = & 3,333\ldots \\ -a & = & -0,333\ldots \\ \hline \Rightarrow 9a & = & 3 \\ \Rightarrow a & = & \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^{11}+3^9}{10}\right)^{0,333\ldots} &= \left(\frac{3^9\cdot(3^2+1)}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{3^9\cdot 10}{10}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{9\cdot\frac{1}{3}} = 3^3 = 27. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Calcule o valor da expressão*

$$\sqrt{\frac{0,666\ldots^{0,666\ldots}}{0,333\ldots^{1,333\ldots}}}.$$

Solução. Fazendo $a = 0,333\ldots$, $b = 0,666\ldots$ e $c = 1,333\ldots$, temos $a = \frac{1}{3}$,

$$\begin{array}{rcl} 10b & = & 6,666\ldots \\ -b & = & -0,666\ldots \\ \hline \Rightarrow 9b & = & 6 \\ \Rightarrow b & = & \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} 10c & = & 13,333\ldots \\ -c & = & -1,333\ldots \\ \hline \Rightarrow 9c & = & 12 \\ \Rightarrow c & = & \frac{12}{9} = \frac{4}{3}. \end{array}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{0,666\ldots^{0,666\ldots}}{0,333\ldots^{1,333\ldots}}} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{\frac{\frac{2^2}{3^2}}{\frac{1^4}{3^4}}}} = \sqrt[6]{\frac{2^2}{\cancel{3}^2}\cdot\cancel{3}^4} \\ &= \sqrt[6]{2^2\cdot 3^2} = \left((2\cdot 3)^2\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 8. *Calcule o valor da expressão*

$$\sqrt[3]{29-\sqrt[6]{2^5+\frac{5,333\ldots}{1,333\ldots}+3^3+2015^0}}.$$

Solução. Observando as soluções dos exemplos 6 e 7, obtemos, de maneira análoga, que $5,333\ldots = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$ e $1,333\ldots = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{29-\sqrt[6]{2^5+\frac{5,333\ldots}{1,333\ldots}+3^3+2015^0}} = \\ &= \sqrt[3]{29-\sqrt[6]{32+\frac{\frac{16}{3}}{\frac{4}{3}}+27+1}} \\ &= \sqrt[3]{29-\sqrt[6]{32+\frac{16}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}+27+1}} \\ &= \sqrt[3]{29-\sqrt[6]{32+4+27+1}} \\ &= \sqrt[3]{29-\sqrt[6]{64}} \\ &= \sqrt[3]{29-2} = \sqrt[3]{27} = 3. \end{aligned}$$

$\square$

Dicas para o Professor

Duas sessões de 50min são suficientes para resolver, com todos os detalhes, os oito exemplos que compõem este material. Mais uma vez, chame a atenção para as propriedades que são utilizadas em cada caso.