Material Teórico - Módulo de Princípios Básicos de Contagem

Permutações com elementos repetidos

Segundo Ano do Ensino Médio

Prof. Fabrício Siqueira Benevides

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Permutações com elementos repetidos

Nesta aula, utilizaremos os conceitos de permutação e anagrama, que foram expostos na aula anterior. Lembre-se de que permutar um grupo de elementos consiste em colocá-los em uma determinada ordem. E lembre-se de que, quando n é um inteiro não negativo, a quantidade de permutações de um grupo de n objetos distintos é igual a $P_n = n!$. De outra forma, a quantidade de maneiras de ordenar um conjunto com n elementos é igual a $P_n = n!$. Nessa aula, desejamos contar a quantidade de permutações de uma lista de objetos, onde alguns desses objetos podem aparecer repetidos, isto é, podem estar listados mais de uma vez. Em uma permutação com objetos repetidos, cada objeto deve aparecer na permutação exatamente a mesma quantidade de vezes que aparece na lista original. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. *Maria tem três restaurantes favoritos. Um deles é uma hamburgueria, outro é um restaurante italiano e o terceiro é um restaurante japonês. Ela acabou de conseguir um novo emprego e, para comemorar, pretende jantar em um desses restaurantes durante os próximos quatro dias. Como o restaurante japonês é o seu favorito, ela decidiu que irá exatamente duas vezes a ele e uma vez a cada um dos demais. De quantas formas ela pode escolher a ordem em que irá jantar nesses restaurantes?*

Solução 1. Vamos usar as letras H, I e J para representar, respectivamente, a hamburgueria, o restaurante italiano e o restaurante japonês. Podemos usar uma palavra formada por quatro dessas letras para indicar em que ordem Maria irá jantar nesses restaurantes. Lembramos que, nesse contexto, uma palavra é qualquer sequência de letras. Por exemplo, IJHJ é a palavra que indica que Maria irá primeiro ao restaurante italiano, em seguida ao japonês, depois à hamburgueria e, por fim, novamente ao japonês. Para satisfazer a condição de que Maria irá ao restaurante japonês exatamente duas vezes e irá aos demais uma vez, as palavras que iremos formar devem ser anagramas de $HIJJ$. Queremos, então, contar quantos desses anagramas existem.

A ideia para resolver esse tipo de problema é transformá-lo em um problema que já sabemos resolver. Veja que, se tivéssemos 4 restaurantes distintos, a solução seria bastante simples. Vamos supor por um momento que existissem dois restaurantes japoneses, que iremos chamar de J_1 e J_2, e que Maria desejasse ir uma vez a cada um deles. Nesse caso, para resolver o problema bastaria calcular o número de permutações do conjunto $\{H, I, J_1, J_2\}$, que é igual a $P_4 = 4! = 24$. Acontece que, em verdade, J_1 e J_2 são o mesmo restaurante. Sendo assim, existem permutações diferentes, dentre essas 24 permutações, que determinam uma mesma ordem para os restaurantes em que Maria irá, de fato, jantar. Por exemplo, as permutações HIJ_1J_2 e HIJ_2J_1 são distintas, mas ambas fazem com que Maria visite os restaurantes na ordem indicada pela palavra $HIJJ$. Veja que, em verdade, em qualquer permutação de $\{H, I, J_1, J_2\}$ podemos trocar a ordem entre J_1 e J_2 sem alterar a ordem em que Maria irá visitar os restaurantes. Por outro lado, se trocarmos J_1 ou J_2 com qualquer outra letra, faremos com que a agenda de Maria seja diferente. Dessa forma, podemos organizar as 24 permutações em grupos, onde cada grupo é formado por $2 = 2!$ permutações que representam o mesmo anagrama de $HIJJ$. A quantidade de tais grupos é

$$\frac{P_4}{2!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12,$$

e essa é a resposta para o nosso problema, pois cada grupo corresponde a um anagrama distinto de $HIJJ$.

Para que você visualize claramente essa solução, listamos, na tabela abaixo, todas as 24 permutações do conjunto $\{H, I, J_1, J_2\}$, destacando os pares de permutações que correspondem a uma mesma solução, do ponto de vista de Maria.

HIJ_1J_2	IHJ_1J_2	IJ_1HJ_2	IJ_1J_2H
HIJ_2J_1	IHJ_2J_1	IJ_2HJ_1	IJ_2J_1H
HJ_1IJ_2	J_1HIJ_2	J_1IHJ_2	J_1IJ_2H
HJ_2IJ_1	J_2HIJ_1	J_2IHJ_1	J_2IJ_1H
HJ_1J_2I	J_1HJ_2I	J_1J_2HI	J_1J_2IH
HJ_2J_1I	J_2HJ_1I	J_2J_1HI	J_2J_1IH

A tabela abaixo, por sua vez, foi obtida a partir da anterior, substituindo J_1 e J_2 por J. Veja que cada anagrama de $HIJJ$ aparece exatamente duas vezes nela. Por isso a quantidade de anagramas distintos é apenas $24/2 = 12$.

HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HJIJ	JHIJ	JIHJ	JIJH
HJIJ	JHIJ	JIHIJ	JIJH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH

□

Solução 2. Também é possível resolver esse problema utilizando diretamente o princípio fundamental da contagem. Para isso, no lugar de escolher em qual restaurante Maria irá jantar no primeiro dia, em qual ela irá no segunda dia, etc, vamos começar escolhendo em que dia ela irá jantar na hamburgueria e em que dia ela irá ao restaurante italiano. Veja que há quatro possibilidades para a escolha do dia em que ela irá à hamburgueria e, uma vez escolhido tal dia, há três possibilidades para a escolha do dia em que ela irá ao restaurante italiano. Tendo tomado essas duas escolhas, não há mais o que escolher, pois nos dois dias restantes ela deverá ir ao restaurante japonês. Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, há $4 \cdot 3 = 12$ possíveis maneiras de escolher os dias em que ela irá jantar em cada restaurante. □

A Solução 2 acima funciona bem no caso em existe apenas um objeto que se repete. Por exemplo, no caso em que desejamos visitar um restaurante k vezes, onde k é um número natural qualquer, e desejamos visitar cada um dos demais restaurantes exatamente 1 vez. Apesar de que a Solução 2 é mais curta e mais simples de se explicar, ela possui a desvantagem de não poder ser facilmente adaptada para o caso mais geral em que mais de um objeto pode ser escolhido mais de uma vez. Por outro lado, a ideia utilizada na Solução 1 poderá ser adaptada facilmente a essa situação geral. De toda forma, vejamos mais um exemplo onde as duas soluções funcionam.

Exemplo 2. *Calcule o número de anagramas da palavra ABACATE.*

Solução 1. Façamos algo semelhante à Solução 1 do Exemplo 1. Veja que temos 7 letras e que uma delas, a letra A, é repetida três vezes, enquanto as demais aparecem, cada uma, apenas uma vez. Primeiramente vamos substituir a letra A pelas letras A_1, A_2 e A_3, obtendo-se o conjunto $\{A_1, B, A_2, C, A_3, T, E\}$. Sabe-se que o número de permutações desse conjunto é $P_7 = 7! = 5.040$. Agora, tente imaginar uma lista com todas essas 7! permutações e substitua todas as ocorrências das letras A_1, A_2 e A_3 pela letra A. O resultado é uma lista com 7! anagramas de ABACATE, mas nessa lista cada anagrama aparece mais de uma vez. Precisamos contar quantas vezes cada anagrama aparece e usar essa informação para calcular o número de anagramas distintos. Para isso, basta observar que, para cada permutação da lista original, o número de permutações que geram o mesmo anagrama é igual ao número de maneiras de permutarmos as letras A_1, A_2, A_3 sem mover as demais letras dentro da permutação em questão. Por exemplo, o anagrama $AABACTE$ pode ser obtido a partir de uma qualquer das $3! = 6$ permutações a seguir:

$$\begin{array}{ll} A_1A_2BA_3CTE, & A_1A_3BA_2CTE, \\ A_2A_1BA_3CTE, & A_2A_3BA_1CTE, \\ A_3A_1BA_2CTE, & A_3A_2BA_1CTE. \end{array}$$

Desse modo, na lista com os 7! anagramas, cada anagrama aparece exatamente 3! vezes. A conclusão é que o número de anagramas distintos de ABACATE é apenas

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5.040}{6} = 840.$$

□

Solução 2. Usaremos a mesma ideia da Solução 2 do Exemplo 1. Considere os espaços "__ __ __ __ __ __ __", que desejamos preencher com um anagrama da palavra ABACATE. Para isso, precisamos decidir, para cada uma das letras de ABACATE, qual ou quais espaços serão ocupados por ela. Vejamos como fazer isso. Vamos deixar para escolher as posições ocupadas pela letra A, que é a única que se repete, por último. Começamos, então, escolhendo em que posição iremos colocar a letra B. Nesse momento, todos os 7 espaços estão em branco e, portanto, a posição da letra B pode ser escolhida de 7 maneiras distintas. Uma vez feito isso, restam outras 6 posições possíveis onde podemos colocar a letra C. Em seguida, restam 5 posições onde podemos colocar a letra E. Agora, de modo semelhante, restam apenas 4 espaços, e podemos escolher qualquer um deles para colocar a letra T. Por fim, veja que os três espaços que sobraram devem ser aqueles ocupados pela letra A e, assim sendo, não temos mais liberdade de escolher onde elas irão ser colocadas. Logo, há apenas 1 maneira de distribuir as três letras A. Pelo princípio fundamental da contagem, o número total de maneiras de distribuir as letras nos espaços é: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1$. Note que, uma maneira mais curta de expressar o produto anterior é $\frac{7!}{3!}$, que coincide com a resposta encontrada na solução anterior. □

Como um bom exercício, o leitor nesse momento deve tentar generalizar os argumentos das Soluções 1 e 2 a fim de obter duas provas distintas para o seguinte fato.

> Se, em uma palavra com n letras, há uma letra que se repete t vezes e todas as demais aparecem apenas uma vez, então o número de anagramas dessa palavra é:
>
> $$\frac{P_n}{t!} = \frac{n!}{t!}.$$

Vejamos, agora, o que acontece se tivermos mais de uma letra que aparece mais de uma vez.

Exemplo 3. *Qual o número de anagramas da palavra COPACABANA?*

Solução. Vamos usar a mesma técnica utilizada na Solução 1 do exemplo anterior. Aqui, temos uma palavra com 10 letras, sendo que a letra A aparece 3 vezes, a letra C aparece 2 vezes e as letras P, B, N, O aparecem apenas 1 vez.

Devemos considerar, inicialmente, todas as permutações do conjunto $\mathcal{L} = \{C_1, O, P, A_1, C_2, A_2, B, A_3, N, A_4\}$. Esse conjunto possui 10! permutações. Cada uma dessas permutações irá gerar um anagrama de $COPACABANA$ no momento em que removermos os rótulos das letras A e C. Agora, precisamos contar quantas permutações distintas de $\mathcal{L}$ geram um mesmo anagrama da palavra $COPACABANA$. Isso nos ajudará a calcular a quantidade de anagramas que realmente são distintos. A pergunta fundamental é a seguinte: fixada uma permutação de $\mathcal{L}$, quantas são as permutações que geram o mesmo anagrama que ela? Veja que esse número não depende da permutação em questão. Ele é igual, simplesmente, à quantidade de maneiras que temos de permutar tanto as letras C_1, C_2 entre si, como as letras A_1, A_2, A_3, A_4 entre si. (Mas veja que não podemos permutar as letras C's com A's ou com as demais letras, pois isso geraria um anagrama diferente.) O número de maneiras de permutar C_1 e C_2 é $2!$, enquanto o número de maneiras de permutar A_1, A_2, A_3, A_4 é $4!$. Como as escolhas dessas duas permutações podem ser tomadas de maneira independente e devemos realizar ambas as escolhas, pelo princípio fundamental da contagem, o número total de permutações de $\mathcal{L}$ que geram um mesmo anagrama de $COPACABANA$ é igual a $2! \cdot 4! = 48$. Sendo assim, olhando para a lista das $10!$ permutações de $\mathcal{L}$, percebemos que podemos arranjá-las em grupos de 48 permutações, as quais geram um único anagrama de $COPACABANA$. Segue que o número de anagramas distintos é igual a

$$\frac{10!}{2! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 75.600.$$

$\square$

No caso mais geral em que temos uma palavra com n letras, na qual várias delas podem ser repetidos várias vezes, temos o seguinte resultado.

Sejam $n, n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturais tais que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Considere uma palavra com n letras, sendo k dessas letras distintas. Se $n_1, \ldots, n_k$ representam os números de vezes que cada letra diferente aparece, então o número de anagramas de tal palavra é igual a

$$P^n_{n_1, n_2 \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

A demonstração do resultado acima é idêntica àquela que fizemos no Exemplo 3, bastando observar que o denominador $n_1! n_2! \ldots n_k!$ corresponde ao número de maneiras em que podemos permutar as letras repetidas entre si. Observamos ainda que os autores de alguns livros e alguns professores preferem escrever $P_n^{n_1, n_2 \ldots, n_k}$ no lugar de $P^n_{n_1, n_2 \ldots, n_k}$. Por isso, o aluno deve ficar atento para interpretar esses símbolos corretamente.

Veja que, apesar do enunciado acima falar apenas de anagramas, assim como fizemos na Solução 1 do Exemplo 1, podemos usar palavras para codificar praticamente qualquer tipo de escolha. Assim, essa propriedade pode ser usada para contar o número de permutações de qualquer lista com n objetos, na qual vários deles podem aparecer repetidos.

Observamos que, frequentemente, vários dos números $n_1, \ldots, n_k$ são iguais a 1. Como $1! = 1$, é comum que esses valores sejam omitidos da expressão. Dessa forma, por exemplo, no lugar de escrevermos $P^{10}_{3,4,1,1,1}$, iremos escrever simplesmente $P^{10}_{3,4}$. Ambas as expressões são iguais ao número $\frac{10!}{3! \cdot 4!}$.

2 Exercícios Resolvidos

Exemplo 4. *Qual o número de anagramas da palavra CASA.*

Solução. Veja que CASA é uma palavra com 4 letras, na qual apenas a letra A é repetida, aparecendo duas vezes. Logo, a quantidade de tais anagramas é igual a

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12.$$

$\square$

Exemplo 5. *Qual o número de anagramas da palavra MISSISSIPI?*

Solução. Temos uma palavra com $n = 10$ letras onde a letra S é repetida 4 vezes, a letra I é repetida 4 vezes e as demais letras não se repetem. Logo, a quantidade de tais anagramas é igual a

$$P^{10}_{4,4} = \frac{10!}{4! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{4! \cdot \cancel{4!}} = 6.300.$$

$\square$

Exemplo 6. *O bilhete da loteria esportiva consiste de uma tabela com 13 linhas e 3 colunas. Em cada linha temos os nomes de dois times de futebol que irão jogar um contra o outro. Para cada linha, o apostador deve marcar um X em (exatamente) uma das três colunas, indicando se ele acredita que o jogo terminará em vitória, empate ou derrota para o time da casa. Certo apostador decidiu que irá preencher o cartão escolhendo 4 vezes a coluna da esquerda (vitória), 2 vezes a coluna do meio (empate) e 7 vezes a coluna da direita (derrota). De quantas forma ele poderá preencher o cartão?*

Solução. Cada cartão pode ser representado por uma sequência de 13 letras do conjunto $\{E, M, D\}$, onde cada letra indica se foi escolhida a coluna da esquerda, a do meio ou a da direita no jogo correspondente. De acordo com o enunciado, o que queremos encontrar é, exatamente, o número de permutações da lista $EEEEMMDDDDDDD$. Esse número é igual a:

$$\begin{aligned}\frac{13}{4! \cdot 2! \cdot 7!} &= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{4! \cdot 2! \cdot \cancel{7!}} \\ &= \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{(\cancel{4 \cdot 3} \cdot 2) \cdot 2} = 25.740.\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7. *Quantos são os números formados por exatamente 8 algarismos, escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, onde o algarismo 1 aparece no máximo três vezes, o algarismos 2 aparece no máximo quatro vezes e os demais algarismos aparecem exatamente uma vez cada?*

Solução. Note que, aqui, não nos é informado o número exato de vezes que os algarismos 1 e 2 devem aparecer. Sabemos apenas o número máximo de vezes. Vejamos primeiro como determinar os possíveis valores para o número de vezes em que eles podem aparecer. Como o número deve possuir 8 algarismos e os algarismos 3 e 4 aparecem exatamente uma vez, segue que os números 1 e 2 devem aparecer, conjuntamente, seis vezes. Veja que, se o número 1 aparecesse apenas uma vez, o número 2 precisaria aparecer cinco vezes, mas isso não é permitido pelo enunciado. Logo, temos apenas duas possibilidades:

Caso 1. O algarismo 1 aparece exatamente duas vezes, o que implica que o algarismo 2 aparece quatro vezes: nesse caso, o número formado terá que ser uma permutação da sequência 11222234. A quantidade de tais permutações é:

$$P^{8}_{2,4} = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot \cancel{4!}} = 840.$$

Caso 2. O algarismo 1 aparece exatamente três vezes, o que implica que o algarismo 2 aparece três vezes: nesse caso, o número formado terá que ser uma permutação da sequência 11122234. A quantidade de tais permutações é:

$$P^{8}_{2,4} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cdot \cancel{3!}}{3! \cdot \cancel{3!}} = 1.120.$$

Por fim, de acordo com o Princípio Aditivo, como todos os números do enunciado ou se enquadram no Caso 1 ou se enquadram no Caso 2, mas não em ambos, segue que a resposta para nosso problema é: $840 + 1120 = 1.960$. □

Exemplo 8. *O diretor de uma escola possui 4 canetas azuis, 5 canetas vermelhas, 3 canetas pretas e 1 caneta laranja. Ele deseja ficar com uma deles e distribuir as demais para os 12 professores de Matemática de sua escola, entregando uma para cada um deles. As canetas de uma mesma cor são idênticas.*

(a) De quantos modos ele pode fazer a distribuição?

(b) De quantos modos ele pode fazer isso caso ele queira ficar com uma caneta vermelha?

(c) De quantos modos ele pode fazer isso se ele não quer ficar com uma caneta azul?

Solução. Veja que, como $4+5+3+1 = 13$ e há 13 pessoas que receberão as canetas, é possível distribuir as canetas da forma desejada. Para fazê-lo, o diretor pode formar uma fila com os professores, dispor as canetas em sua mesa, ficar com a primeira delas e entregar as demais uma a uma, na ordem em que foram postas sobre a mesa. Dessa forma, a quantidade de maneiras de distribuir as canetas é igual ao número de maneiras de ordená-las em cima de sua mesa. Isso também pode ser visualizado como o número de anagramas da palavra "AAAAVVVVVPPPL", onde cada letra representa a inicial da cor da caneta.

(a) O número de maneiras de fazer isso igual a

$$P^{13}_{4,5,3,1} = \frac{13!}{4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1!} = 360.360.$$

(b) Basta que o diretor fique com uma das canetas vermelhas antes de fazer a distribuição. Como todas as canetas vermelhas são idênticas, há apenas uma maneira de fazer isso. Agora, temos 4 canetas azuis, 4 vermelhas, 3 pretas e 1 laranja. O número de maneiras de distribuí-las é:

$$P^{12}_{4,4,3,1} = \frac{13!}{4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 138.600.$$

(c) Há várias maneiras de realizarmos essa contagem. A mais trabalhosa seria dividindo o problema em casos, calculando-se separadamente de quantas maneiras o diretor pode ficar com uma caneta vermelha, de quantas maneiras ele pode ficar com uma preta, e de quantas maneiras ele pode ficar com a caneta laranja. A contagem em cada caso pode ser feita como no item anterior e, ao final, os resultados devem ser somados.

Uma maneira mais rápida é fazendo uma contagem pelo conjunto complementar. Nesse caso, basta contarmos o número de maneiras em que o diretor fica com uma caneta azul, subtraindo essa quantidade do total de maneiras. A quantidade de formas de ficar com uma caneta azul é

$$P^{12}_{3,5,3,1} = \frac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1!} = 110.880.$$

Segue que a quantidade de maneiras em que ele não fica com uma caneta azul é:

$$360.360 - 110.880 = 249.480.$$

(c.2) Por fim, vejamos uma outra solução para o item (c), na qual utilizamos a mesma ideia que usamos originalmente para determinar a fórmula para a quantidade de permutações com repetições. Primeiramente, iremos supor que todas as canetas são diferentes. Consideremos, então, todas as 13! permutações do conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, P_1, P_2, P_3, L_1\}$. Dentre estas, temos $9 \cdot 12!$ permutações nas quais a primeira letra é diferente de A_1, A_2, A_3 e A_4 (já que, nesse caso, a primeira letra pode ser escolhida de 9 maneiras e as demais podem permutar livremente). Agora, lembrando que, em verdade, as canetas de mesma cor são idênticas, precisamos dividir esse número por $4! \cdot 5! \cdot 3!$. Dessa forma, obtemos a resposta

$$\frac{9 \cdot 12!}{4! \cdot 5! \cdot 3!} = 249.480.$$

□

Exemplo 9. *Um sapo está sobre uma reta. A cada pulo que ele dá, ele anda exatamente* $15cm$ *para a direita ou* $15cm$ *para a esquerda. Sabe-se que ele deu* 10 *pulos e retornou à sua posição original. Determine a quantidade de percursos distintos que ele pode ter percorrido.*

Solução. Talvez o mais difícil para obter essa solução seja perceber que, para poder voltar para a posição inicial, o número de pulos que o sapo deu para a direita deve ter sido igual ao número de pulos que ele deu para a esquerda. Como ele deu 10 pulos ao todo, ele precisou dar exatamente 5 pulos para a esquerda e 5 para a direita. Dessa forma, o percurso percorrido pelo sapo está inteiramente determinado por uma sequência de 5 letras 'E' e 5 letras 'D', que representam, respectivamente, os pulos para a esquerda e para a direita. Logo, a quantidade de percursos possíveis é o número de anagramas de "EEEEEDDDDD", que, por sua vez, é igual a:

$$P_{5,5}^{10} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252.$$

□

Dicas para o Professor

Durante a apresentação desse material, o objetivo é simplesmente dar continuidade ao que foi feito no material sobre permutações simples, de modo a pavimentar o terreno para o que virá nas aulas seguintes. Observamos que o conceito de permutações com repetição pode ser usado como uma maneira alternativa de demonstrar a fórmula para o número de combinações. Além disso, é importante ressaltar que a ideia de contar o número de elementos de um conjunto de forma que "acidentalmente" alguns elementos sejam contados mais de uma vez, dividindo em seguida o resultado pela quantidade de vezes que cada elemento foi contabilizado, só funciona quando essa última quantidade é a mesma para todos os objetos. Por exemplo, nas soluções dos exemplos dessa aula, ao contar o número de anagramas de uma palavra com letras repetidas, fizemos uma lista de permutações e, a partir dela, montamos uma lista de anagramas na qual cada um dos anagramas desejados estava sendo contado exatamente $n_1! \ldots n_k!$ vezes. Por isso é que bastou dividirmos a quantidade total de permutações pelo número $n_1! \ldots n_k!$. No caso de objetos diferentes serem contabilizados uma quantidade diferente de vezes, seria necessário quabrar o problema em casos ou, talvez, utilizar técnicas bem mais avançadas de contagem. Por isso, é preciso tomar cuidado com problemas de contagem que envolvem a operação de divisão.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.