Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 1

Equação da Reta

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos A_1, A_2 e A_3 no plano, com coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3), respectivamente. Suponhamos que esses três pontos sejam colineares, isto é, estejam sobre uma mesma reta, como mostrado na figura 1.

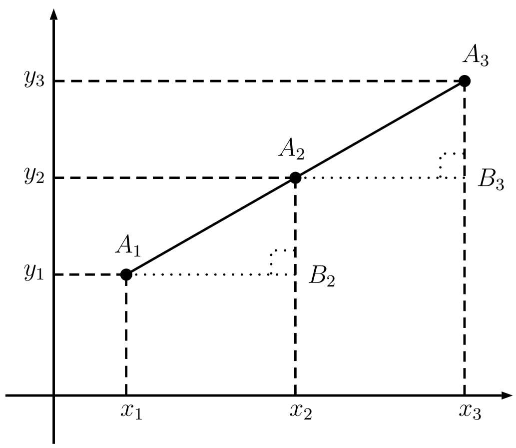


Figura 1: três pontos colineares.

Como as retas horizontais que passam pelos pontos A_1 e A_2 são paralelas, os ângulos $\angle A_2A_1B_2$ e $\angle A_3A_2B_3$ são correspondentes, logo, congruentes. Como os triângulos $A_1A_2B_2$ e $A_2A_3B_3$ são retângulos, da congruência de ângulos $\angle A_2A_1B_2 \equiv \angle A_3A_2B_3$ segue que tais triângulos são semelhantes, pelo caso de semelhança AA. Assim,

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_2B_3}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_3}}.$$

Em termos de coordenadas, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Outra maneira de escrever essa igualdade é

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, ainda,

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 = 0. \tag{1}$$

A igualdade (1) também pode ser obtida por um argumento que compara áreas de trapézios, como faremos a seguir.

Na figura 1, temos os trapézios $A_1A_2x_2x_1$, $A_2A_3x_3x_2$ e $A_1A_3x_3x_1$. Como os pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares, a área do trapézio maior é igual à soma das áreas dos outros dois trapézios. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} &= \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2} \\ &\quad + \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Simplificando a igualdade (2), encontramos exatamente a igualdade (1).

Mais geralmente, se os três pontos A_1, A_2 e A_3 não forem colineares (veja a figura 2), eles são vértices de um triângulo, cuja área é o valor absoluto da diferença entre a área do trapézio maior e a soma das áreas dos outros dois trapézios.

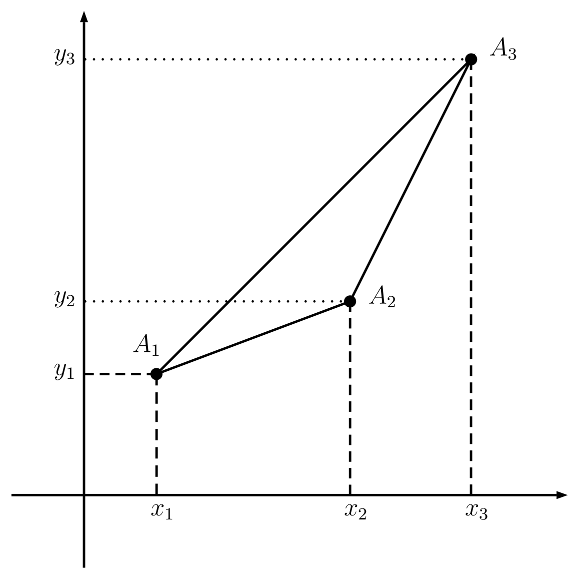


Figura 2: três pontos não colineares.

Calculando as áreas correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} (A_1A_2A_3) &= \Big| \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} \\ &\quad - \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2} \\ &\quad - \frac{(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)}{2} \Big|, \end{aligned} \tag{3}$$

onde escrevemos $(A_1A_2A_3)$ para denotar a área do triângulo $A_1A_2A_3$.

Como antes, podemos simplificar a expressão acima para obter

$$\begin{aligned} (A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - \\ &\quad - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|. \end{aligned} \tag{4}$$

Quando os três pontos estão sobre uma mesma reta, o triângulo se degenera em um segmento de reta, logo, pode ser visto como um "*triângulo de área zero*". Correspondentemente, igualando a zero a expressão da área em (4), obtemos novamente a expressão algébrica da colinearidade, dada como em (1).

As expressões em (1) e (4) são complicadas, envolvem vários índices e são difíceis de memorizar. Para facilitar a escrita das mesmas, utilizaremos a notação a seguir:

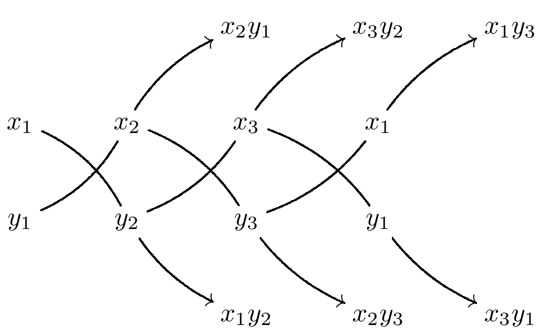
Notação 1. *Escrevemos*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

para indicar a expressão

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3. \tag{6}$$

Para obtermos (6) a partir de (5) procedemos da seguinte maneira:



No diagrama acima, uma seta indica que os elementos que ela percorre serão multiplicados para gerar o produto que aparece no final da seta.

Os produtos x_1y_2, x_2y_3 e x_3y_1 são tomados com sinal positivo, enquanto os produtos x_2y_1, x_3y_2 e x_1y_3 são tomados com sinal negativo. Em seguida, calculamos a soma algébrica de tais produtos.

Assim, a área do triângulo $A_1A_2A_3$ é dada por

$$(A_1A_2A_3) = \pm\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

com o sinal $+$ ou $-$ escolhido de forma a tornar positivo o valor do segundo membro.

Por outro lado, no caso em que os pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares, temos

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Observações 2.

(1) *É comum encontrarmos a notação dada em (5) escrita de modo ligeiramente diferente, com uma* coluna *formada pelas abscissas dos pontos e a outra coluna formada pelas ordenadas dos pontos. Optamos pela notação "horizontal" por uma questão meramente tipográfica.*

(2) *A escolha das coordenadas x_1 e y_1 para ocuparem a primeira coluna em (5) é irrelevante. Mais precisamente, poderíamos ter começado com as coordenadas de qualquer outro vértice do triângulo, desde que permutemos seus índices* ciclicamente *e que a primeira coluna em (5) seja repetida como última coluna. Em símbolos,*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(Observe a alternância dos índices das coordenadas que ocupam as colunas 1, 2, 3 *e* 4*.)*

(3) *É possível escrever a notação dada em (5) como um determinante* 3×3*:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

(4) *No caso particular em que um dos pontos é a origem, digamos $(x_3, y_3) = (0, 0)$, temos:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & x_1 \\ y_1 & y_2 & 0 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \tag{10}$$

Assim, a igualdade (10) *é uma condição necessária e suficiente para que os pontos A_1 e A_2 sejam colineares com a origem.*

Uma propriedade notável da expressão (5) é que ela é *aditiva*, da seguinte forma: inicialmente, sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 os vértices de um quadrilátero convexos, listados no sentido anti-horário (veja a figura 3). Calculando

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

de forma análoga a (5), é possível verificar-se diretamente que

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_2 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

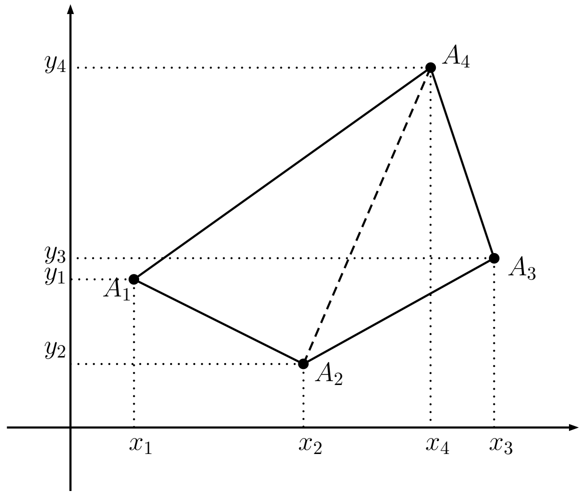


Figura 3: o quadrilátero convexo $A_1A_2A_3A_4$, particionado nos triângulos $A_1A_2A_4$ e $A_2A_3A_4$.

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2, vemos, à luz da igualdade (7), que o módulo do segundo membro é igual à soma das áreas dos triângulos $A_1A_2A_4$ e $A_2A_3A_4$, ou seja, é igual à área do quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. Portanto, denotando por $(A_1A_2A_3A_4)$ a área do quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, temos

$$(A_1A_2A_3A_4) = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

com o sinal $+$ ou $-$ escolhido de forma a tornar positivo o valor do segundo membro.

Em geral, se $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono convexo com n lados e os vértices são enumerados seguindo um sentido de percurso fixado (horário ou anti-horário), então sua área é dada por

$$(A_1A_2A_3A_4) = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

sendo o segundo membro calculado exatamente como em (5) e o sinal $+$ ou $-$ escolhido de forma a tornar positivo o valor do segundo membro.

2 A equação de uma reta

Podemos pensar na Geometria Analítica como um *modelo* da Geometria Euclidiana Plana. Em princípio, conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, de todos os pares ordenados de números reais, nada tem de geométrico. No entanto, fixado um par de eixos ortogonais no plano, fica estabelecida uma correspondência entre esses pares ordenados e os pontos do plano.

Como esperado, uma reta deve ser um conjunto de pontos, ou seja, um conjunto de pares ordenados. Entretanto, uma vez que *reta* é uma noção primitiva da Geometria Euclidiana, não temos uma definição geométrica para essa objeto. Portanto, para caracterizar os pares ordenados que constituem uma *reta*, devemos utilizar os axiomas da construção da Geometria Euclidiana plana.

Um dos axiomas de incidência da Geometria Euclidiana Plana afirma que *por dois pontos passa uma única reta*. Consideremos, então, dois pontos (pares ordenados) $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. A reta r determinada pelos pontos A_1 e A_2 é o conjunto dos pontos (pares ordenados) (x, y) que são colineares com A_1 e A_2. Portanto, a condição de colinearidade (8) fornece:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x & x_1 \\ y_1 & y_2 & y & y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_{a}x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{b}y + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)}_{c} = 0.$$

Denotando $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$, escrevemos a igualdade acima como

$$ax + by + c = 0. \tag{15}$$

Dizemos que a igualdade (15) é a **equação geral da reta** r, nas coordenadas x e y. Assim, um ponto (x, y) pertence à reta r se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação da reta, isto é, se, e somente se, a igualdade $ax + by + c = 0$ é verdadeira.

Os números reais $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$ são chamados **coeficientes** da equação da reta. Eles dependem apenas das coordenadas dos pontos A_1 e A_2, de modo que esses pontos determinam a equação da reta.

Suponha que $a = 0$ e $b \neq 0$. A diferença $y_1 - y_2 = a = 0$ nos diz que os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ têm a mesma ordenada. Isso significa que a reta r, cuja equação é $by + c = 0$, é horizontal (veja a figura 4(a)).

Suponha, agora, que $b = 0$ e $a \neq 0$. Nesse caso, a diferença $x_2 - x_1 = b = 0$ implica que os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ têm a mesma abscissa e, por isso, a reta r, de equação $ax + c = 0$ é vertical (veja a figura 4(b)).

Finalmente, se $c = 0$, com a e b não simultaneamente nulos, a condição $x_1y_2 - x_2y_1 = c = 0$ implica, pela Observação 2 (4), que a reta de equação $ax + by = 0$ passa pela origem (veja a figura 4(c)). Isso também é imediato se notarmos que, se $c = 0$, então a igualdade $ax + by = 0$ torna-se trivialmente verdadeira para $x = 0$ e $y = 0$.

Exemplo 3. *Seja r a reta que passa pelos pontos $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Essa reta passa pelo ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}\right)$?*

Solução. Para responder essa pergunta, vamos primeiro encontrar a equação da reta r. Depois disso, checaremos se as coordenadas do ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}\right)$ satisfazem essa equação.

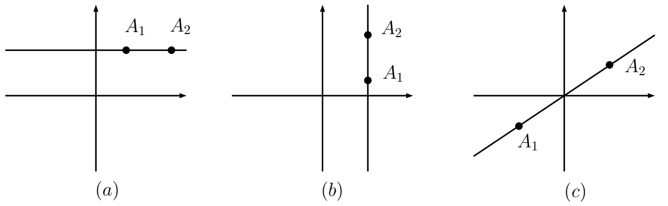


Figura 4: as três possíveis posições de uma reta em relação aos eixos coordenados.

Usando (14), obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & x & 2 \\ 1/2 & 2 & y & 1/2 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

ou, ainda,

$$4 + \frac{y}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - 2x - 2y = 0.$$

Simplificando, obtemos:

$$6x + 6y - 15 = 0.$$

Podemos, agora, verificar se o ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}\right)$ pertence à reta: substituindo x e y por $1/6$ e $7/3$, respectivamente, encontramos:

$$6 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{7}{3} - 15 = 1 + 14 - 15 = 0.$$

Logo, o ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{3}\right)$ realmente pertence à reta r.

Alternativamente à solução acima, é claro que poderíamos ter concluído isso substituíndo as coordenadas do ponto diretamente na expressão (16) e verificando que a expressão é, nesse caso, igual a zero. □

3 A equação reduzida de uma reta

Assim como pode ser determinada por dois de seus pontos, uma reta também pode ser determinada por um ponto e uma direção. A direção de uma reta r é determinada pelo ângulo que essa reta forma com o eixo horizontal. Para evitar ambiguidades, convenciona-se que esse ângulo deve ser medido a partir da parte positiva do eixo das abscissas, no sentido anti-horário, conforme mostrado na figura 5.

Suponha que a reta r não é vertical. Dados dois pontos A_1 e A_2 sobre r, com coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente, seja B o ponto de interseção entre a reta horizontal que passa por A_1 e a reta vertical que passa por A_2 (veja a figura 5).

O ângulo $\angle A_2A_1B$, interno do triângulo A_1A_2B, tem a mesma medida θ que o ângulo formado entre a reta r e a parte positiva do eixo das abscissas, orientado no sentido anti-horário. Usando a definição de tangente de um ângulo em um triângulo, obtemos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b},$$

onde a e b são os coeficientes da equação geral da reta (15).

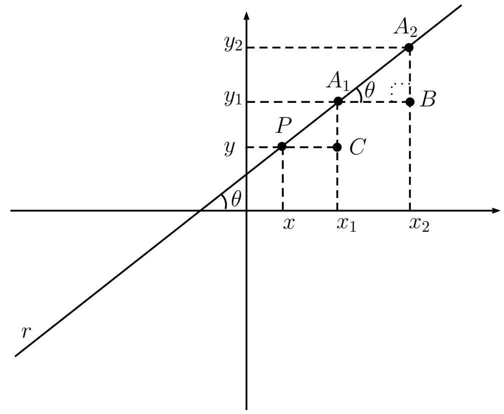


Figura 5: ângulo formado por uma reta com o eixo horizontal.

Observe que $b = x_2 - x_1 \neq 0$ pois a reta r não é vertical. Isolando y na equação geral (15), obtemos $by = -ax - c$ e, daí,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + q, \tag{17}$$

onde $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

O número real $m = \operatorname{tg}\theta$ é chamado **coeficiente angular** da reta. Ele mede a *direção* da reta, tomando o eixo horizontal como referência. O número real $q = -\frac{c}{b}$ é chamado **coeficiente linear** da reta. Ele mede a *posição* em que a reta intersecta o eixo vertical; realmente, se $x = 0$, então $y = q$, de forma que o ponto $(0, q)$ pertence à reta r.

Se P é um ponto com coordenadas (x, y) pertencente à reta r (veja a figura 5), então o ângulo $\angle A_1PC$ tem medida θ, logo

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Assim,

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{18}$$

A equação (18) é também chamada **equação reduzida** da reta r. Observando (18), concluímos que a equação de uma reta não vertical pode ser determinada conhecendo-se as coordenadas de um de seus pontos e o seu coeficiente angular.

Alternativamente à discussão acima, a seguir, iremos obter a equação reduzida de uma reta não vertical sem a necessidade de utilizar a noção de ângulo. Para tanto, consideremos a reta t, paralela ao eixo y e passando pelo ponto R de coordenadas $(1, 0)$ (veja a figura 6).

A reta r sendo não vertical, intersecta o eixo y em um ponto Q e a reta t em um ponto T. Seja s a reta que passa pela origem O e é paralela à reta r. Finalmente, seja P o ponto de interseção entre s e t.

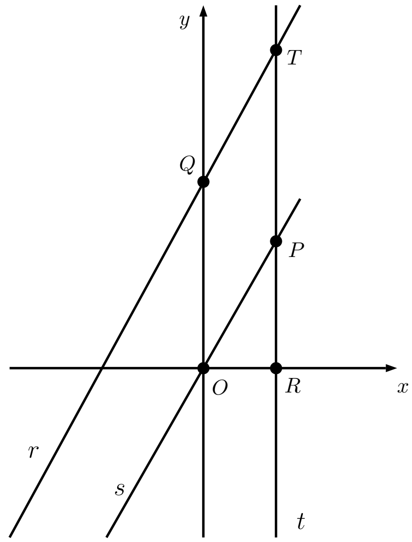


Figura 6: os segmentos orientados $OQ = q$ e $RP = m$.

Estabelecidas as notações acima, temos o seguinte fato:

Os segmentos orientados RP e OQ são iguais ao coeficiente angular e ao coeficiente linear da reta r, repectivamente.

(Para uma explicação sobre a noção de segmento orientado veja a aula *Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano*, parte 2, página 1.)

O fato de OQ ser igual ao coeficiente linear da reta r é consequência direta da definição de coeficiente linear.

Por outro lado, as retas r e s, sendo paralelas, formam o mesmo ângulo com eixo x. Assim, se θ é a medida do ângulo $\angle POR$, então o coeficiente angular da reta r é igual a $\operatorname{tg}\theta = \frac{RP}{OR} = RP$, pois $\overline{OR} = 1$. Isso mostra que o coeficiente angular da reta r é igual ao segmento orientado RP.

Vale a pena notar que toda a informação sobre a reta não vertical r pode ser obtida observando-se sua interseção com a faixa vertical situada entre o eixo y e a reta t.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

As duas formas de deduzir a condição de alinhamento de três pontos podem ser exploradas separadamente. A dedução usando áreas tem a vantagem de produzir também uma fórmula para a área de um triângulo em termos das coordenadas de seus vértices, e tal fórmula pode ser generalizada, como fizemos, para o cálculo da área de polígonos convexos.

No caso em que os vértices são pontos com coordenadas inteiras, essa fórmula passa a ter conexões com um resultado conhecido como o *Teorema de Pick*. Para mais informações sobre esse teorema, veja a sugestão de leitura complementar 3 ou, ainda, os exercícios ao capítulo 6 da sugestão de leitura complementar 2.

Você pode utilizar um *software* de geometria dinâmica para estudar as possíveis posições de uma reta conforme os coeficientes de sua equação geral variem. Se for possível fazer isso, será interessante que você calcule as razões $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, se $b \neq 0$, e interprete os diversos valores assumidos por essas razões como medidas da direção e da posição de cada uma das respectivas retas.

Finalmente, a última parte do texto exibe uma abordagem alternativa para o cálculo dos coeficientes da equação reduzida, sem que se faça uso da noção de ângulo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
3. E. L. Lima. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, sexta edição, Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.