

**Material Teórico - Módulo Operando com
Transformações Lineares: Álgebra e Geometria**

Equivalências Afins e Aplicações - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Abril de 2022



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta segunda parte, continuaremos apresentando exemplos do uso de equivalências afins na resolução de problemas geométricos.

1 Mais aplicações

Para nosso primeiro exemplo, lembre-se de que uma equivalência afim F preserva razões orientadas: $\frac{F(P)F(X)}{F(X)F(Q)} = \frac{PX}{XQ}$, para quaisquer três pontos colineares e distintos P , Q e X . (vide relação (2) da 1ª parte). Também convém relembrar o Teorema 3 da 1ª parte: *quaisquer dois paralelogramos são afim-equivalentes*.

Exemplo 1. *Uma reta r corta os lados AB e AD de um paralelogramo $ABCD$ nos pontos E e F , respectivamente. Se G é o ponto de interseção da diagonal AC com a reta r , prove que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$.*

Prova. Como a igualdade proposta no problema envolve apenas razões orientadas, podemos fazer a sua verificação para um paralelogramo em particular, por exemplo, um quadrado. Daí seguirá o caso geral.

Mais explicitamente, transforme o paralelogramo $ABCD$ num quadrado $A'B'C'D'$, de modo que a configuração $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ seja afim-equivalente a $S' = \{A', B', C', D', E', F', G'\}$. As relações $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'E'}}$, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'F'}}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'G'}}$ nos dizem que as igualdades $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'E'}} + \frac{\overline{A'D'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'G'}}$ são equivalentes. Assim, no final das contas, podemos supor que $ABCD$ é um quadrado. Veja a figura na próxima página.

Sendo $\overline{AC} = \sqrt{2}\overline{AB} = \sqrt{2}\overline{AD}$, a igualdade $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$ equivale a $\frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AF}} = \frac{\sqrt{2}}{\overline{AG}}$, ou ainda, $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \sqrt{2}$. Ora, se P e Q são os pés das perpendiculares baixadas de G sobre os lados AB e AD , respectivamente, então $APGQ$ é um quadrado. Além disso, temos as semelhanças $PGE \sim$

$AFE \sim QFG$, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} &= \sqrt{2} \left(\frac{\overline{QG}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{GP}}{\overline{AF}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\overline{FG}}{\overline{FE}} + \frac{\overline{GE}}{\overline{FE}} \right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

como desejado. □

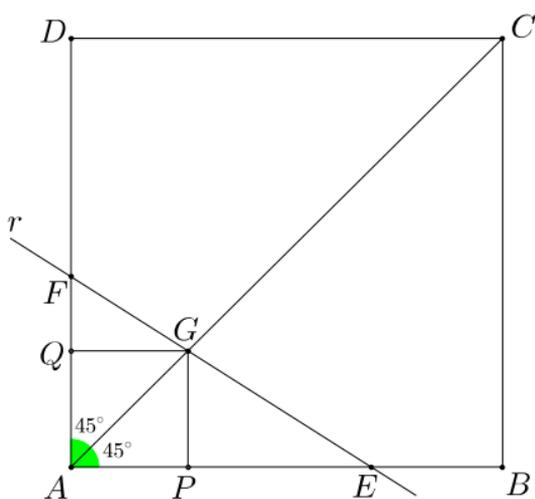


Figura 1: a versão “quadrada” do Exemplo 1.

Para o próximo exemplo, observe que, na Proposição 9 da 1ª parte, provamos o seguinte: *dados um triângulo ABC e um ponto P no interior desse triângulo, então existe um triângulo $A'B'C'$ e uma equivalência afim transformando ABC em $A'B'C'$ e levando P no ortocentro de $A'B'C'$.*

Exemplo 2. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo que não é um trapézio. Se as retas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ se encontram em E e as retas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$ se cruzam em F , mostre que os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF são colineares.*

Antes de iniciar a demonstração, convém lembrar do seguinte fato: a mediatriz do segmento que conecta os pontos de interseção de dois círculos secantes é a reta passando pelos centros desses círculos.

Prova do Exemplo (2). Para fixar as ideias, suponhamos que C seja interior ao triângulo AEF . Como “colinearidade” é uma propriedade afim, não há perda de generalidade em supor que C é o ortocentro do triângulo AEF . Portanto, os quadriláteros $ABCD$ e $BEFD$ são inscritíveis, sendo P , o ponto médio de AC , e Q , o ponto médio de EF , os centros dos círculos circunscritos a tais quadriláteros, respectivamente.

Pelo resultado da 1ª parte mencionado acima, a reta \overleftrightarrow{PQ} é a mediatriz do segmento BD , de modo que \overleftrightarrow{PQ} corta BD em seu ponto médio M , demonstrando o que nos foi requerido. \square

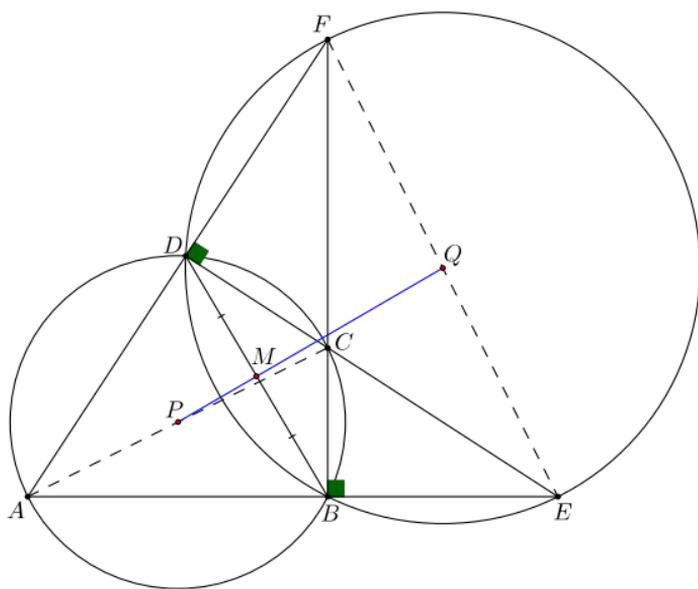


Figura 2: P , M e Q são colineares.

Observação 3. Na referência [1] é apresentada uma solução do problema anterior utilizando o resultado enunciado no Exemplo 14 da 1ª parte dessa aula.

Uma equivalência afim, em geral, não preserva bissetrizes. Há, todavia, uma exceção.

Lema 4. *Se a equivalência afim F transforma o par (r,s) de retas perpendiculares num par (r',s') de retas também perpendiculares, então qualquer ângulo admitindo r como bissetriz será transformado por F num ângulo cuja bissetriz é r' .*

A demonstração faz uso do seguinte resultado: se OM , OD e OH são a mediana, a bissetriz e a altura, relativas ao vértice O de um triângulo então a coincidência de quaisquer duas dessas cevianas implica na igualdade das três (vide [2]).

Prova do Lema (4). Sejam O (resp. O') o ponto de encontro das retas r,s (resp. r',s') e XOY um ângulo bissectado por r .

Fixe uma paralela t à reta s , a qual cruza os lados do ângulo nos pontos $A \in OX$, $B \in OY$ e corta r em M (acompanhe na Figura 3). Vemos que OM é bissetriz e altura de OAB , de modo que OM também é mediana, ou seja, M é o ponto médio de AB . Segue que $M' = F(M)$ é o ponto médio de $A'B' = F(AB)$.

Como $\overleftrightarrow{O'M'} = r' \perp s' // \overleftrightarrow{A'B'}$, vemos que $O'M'$ é mediana e altura do triângulo $O'A'B'$, de onde se conclui que $O'M'$ também é bissetriz. Logo, r' bissecta o ângulo $A'O'B'$, a imagem do ângulo XOY por F . \square

Observação 5. Dada uma equivalência afim F , sempre há um par de retas (r,s) nas condições do lema anterior. De fato, escrevendo $F|_O = T + v$, o teorema de decomposição polar aplicado à transformação linear invertível T nos dá $T = S \circ U$, sendo S uma transformação linear simétrica e U uma transformação linear ortogonal. Como sabemos, existe um sistema de coordenadas ortogonal, cujos eixos

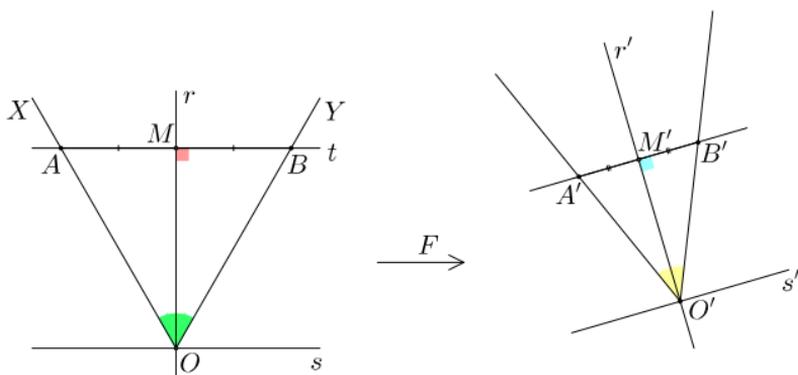


Figura 3: a configuração do Lema 4.

denotaremos por r'', s'' , relativamente ao qual a matriz de S é diagonal, isto é, $S(r'') = r''$ e $S(s'') = s''$. Se r e s são as retas que se aplicam em r'' e s'' por U , então r e s são perpendiculares pois U é uma isometria. Pondo $r' = r'' + v, s' = s'' + v$, temos $r' \perp s'$ e $F(r) = r', F(s) = s'$, como desejado.

De acordo com a 1ª parte dessa aula, dois pontos P e R na reta \overleftrightarrow{AB} são ditos *conjugados harmônicos* relativamente ao segmento AB se $\frac{AP}{PB} = -\frac{AR}{RB}$. Nesse caso, é fácil verificar que A e B são conjugados harmônicos em relação ao segmento PR .

Exemplo 6 (OBM - 2007). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, P a interseção das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , Q a interseção das retas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} e O a interseção das diagonais AC e BD . Prove que se $\angle POQ$ é um ângulo reto então \overleftrightarrow{PO} é bissetriz de $\angle AOD$ e \overleftrightarrow{QO} é bissetriz de $\angle AOB$.*

Prova. Sem perda de generalidade, suponhamos que C seja interno ao triângulo APQ (acompanhe na Figura 4). Basta mostrar que \overleftrightarrow{PO} é bissetriz de $\angle BOC$ (oposto pelo vértice a $\angle AOD$), pois, nesse caso, a perpendicular \overleftrightarrow{QO} deve bissectar

o ângulo suplementar $\angle COD$ (oposto pelo vértice a $\angle AOB$): $C\hat{O}Q = 90^\circ - B\hat{O}C/2 = D\hat{O}Q$. Sejam R o ponto no qual a semirreta \overrightarrow{QO} corta o lado AB e H o ponto de encontro dos segmentos OP e BQ . A menos de uma equivalência afim, podemos supor que H é o ortocentro do triângulo PQR . Como $\angle POQ$ ainda é um ângulo reto nessa nova configuração, o lema anterior nos garante que PO é bissetriz de $\angle BOC$ na configuração antiga se, e só se, PO é bissetriz de $\angle BOC$ na atual configuração.

Sejam $\{S\} = \overleftrightarrow{RH} \cap \overleftrightarrow{PQ}$ e $\{A'\} = \overleftrightarrow{SO} \cap \overleftrightarrow{AB}$. Pela Proposição 21 da 1ª parte, A e A' são conjugados harmônicos de B relativamente ao segmento PR , ou seja, $A' = A$. Segue-se que \overleftrightarrow{OC} , \overleftrightarrow{RH} e \overleftrightarrow{PQ} concorrem em S . Levando em conta que os quadriláteros $PSOR$ e $BHOR$ são inscritíveis, temos $C\hat{O}H = H\hat{R}B = H\hat{O}B$, isto é, \overleftrightarrow{OP} bissecta $\angle BOC$. \square

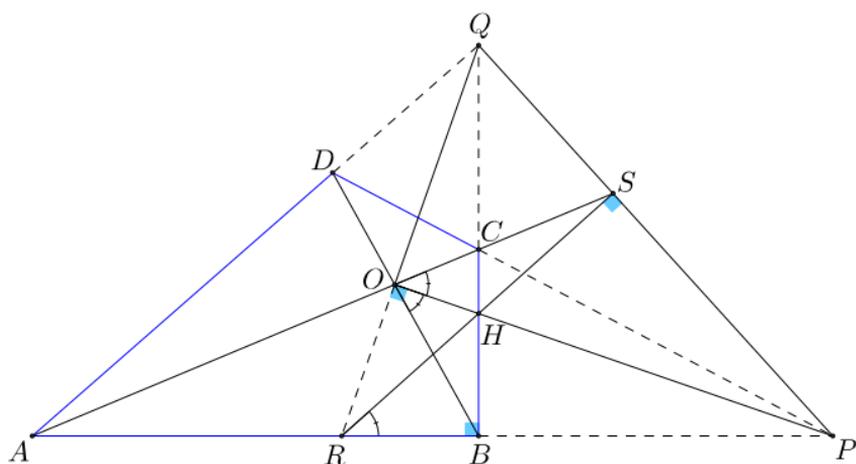


Figura 4: Exemplo 6.

Considere duas retas paralelas r e s e triângulos ABC e $A'B'C'$, com $B, C, B', C' \in r$ e $A, A' \in s$. Como esses triângulos têm mesma altura, é fácil ver que $\frac{A(A'B'C')}{A(ABC)} = \frac{B'C'}{BC}$ (lembre que $A(\mathcal{R})$ denota a área de uma região \mathcal{R} do plano). Dessa observação, obtemos o

Lema 7. Se os triângulos Δ e Δ' possuem um lado em comum, então

$$\frac{\mathcal{A}[F(\Delta')]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} = \frac{\mathcal{A}(\Delta')}{\mathcal{A}(\Delta)},$$

qualquer que seja a equivalência afim F .

Prova. Digamos que seja $\Delta = ABC$ e $\Delta' = A'BC$. Se a paralela r a \overleftrightarrow{BC} por A' corta \overleftrightarrow{AB} em D , então $\mathcal{A}(\Delta') = \mathcal{A}(BCD)$ e $\mathcal{A}[F(\Delta')] = \mathcal{A}[F(BCD)]$ (pois $F(r)$ é paralela a $F(\overleftrightarrow{BC})$). Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}[F(\Delta')]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} &= \frac{\mathcal{A}[F(BCD)]}{\mathcal{A}[F(\Delta)]} = \frac{\overline{F(DB)}}{\overline{F(BA)}} \\ &= \frac{\overline{DB}}{\overline{BA}} = \frac{\mathcal{A}(BCD)}{\mathcal{A}(\Delta)} \\ &= \frac{\mathcal{A}(\Delta')}{\mathcal{A}(\Delta)}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo e P um ponto no interior de $ABCD$ tal que os triângulos PAB , PAD , PDC e PCB têm áreas iguais. Mostre que P é o ponto médio de uma das diagonais de $ABCD$.

Prova. Basta provar que P pertence a alguma das diagonais de $ABCD$. De fato, caso $P \in AC$, vale $1 = \frac{\mathcal{A}(PAB)}{\mathcal{A}(PCB)} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$, demonstrando que P é o ponto médio de AC . Assim, podemos assumir que $P \notin BD$. Supondo, sem perda de generalidade, que P é interior ao triângulo BCD , podemos admitir que P é o ortocentro de BCD .

Pelo Lema (7), nessa nova configuração, as áreas dos triângulos PAB , PAD , PDC e PCB ainda são iguais. Ora, se $\{E\} = \overleftrightarrow{PC} \cap \overleftrightarrow{BD}$, então BE e ED são as alturas, relativas ao lado PC , dos triângulos PCB e PDC , respectivamente. Da hipótese, segue-se que $\overline{BE} = \overline{ED}$, ou seja, PE é altura e mediana do triângulo BPD . Portanto, PE também é bissetriz e BPD é isósceles de base BD .

Como os triângulos PAB e PAD têm áreas iguais e $\overline{BP} = \overline{PD}$, as alturas desses triângulos relativas aos lados BP e PD têm o mesmo comprimento. Isso nos diz que o ponto A equidista dos lados do ângulo $\angle BPD$, ou melhor, A pertence à bissetriz \overrightarrow{PE} . Acabamos de mostrar que A, E, P e C são colineares. Em particular, $P \in AC$, o que encerra a demonstração. \square

Dicas para o Professor

É possível refinar o Lema 7. Por exemplo, *dada uma equivalência afim F , existe uma constante positiva k tal que $A[F(\mathcal{R})] = k \cdot A(\mathcal{R})$.*

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. I. M. Yaglom. *Geometric Transformations III*. AMS, 1973.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
3. A. Sarana, A. Pogorui, R. Dagnino. *Concepts and Problems for Mathematical Competitors*. Dover, 2020.