

**Material Teórico - Módulo de Introdução ao
Cálculo - Funções - Parte 1**

Funções e Imagem - Parte 1

Tópicos Adicionais

**Autores: Profs. Angelo Papa Neto e
Tiago Caúla Ribeiro**

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de Junho de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta aula, faremos uma revisão das noções de função e de imagem de uma função.

1 Definição e exemplos de função

A noção de função já foi introduzida no Módulo *Função - Noções Básicas*, do Nono Ano. Aconselhamos a leitura desse módulo para que se tenha uma introdução mais intuitiva do conceito de função. Aqui, faremos apenas uma breve revisão da definição de função, apresentando alguns exemplos.

Sejam dados dois conjuntos A e B , ambos não vazios. Uma **função** com **domínio** A e **contradomínio** B é uma correspondência f que associa elementos do conjunto A a elementos do conjunto B , de tal modo que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:

- (1) todo elemento $a \in A$ está associado a um elemento $b \in B$;
- (2) o elemento $b \in B$ associado ao elemento $a \in A$ é *único*.

Usamos a notação $f : A \rightarrow B$ para indicar que f é uma função com domínio A e contradomínio B . Também, escrevemos $b = f(a)$ para indicar que b é o único elemento de B associado ao elemento $a \in A$. Nesse caso, dizemos que b é a **imagem de a** .

O conjunto

$$\text{Im } f = \{b \in B \mid b = f(a)\},$$

formado por todos os elementos do contradomínio B que são associados a algum elemento de A , é chamado **imagem da função f** .

Exemplo 1. *Uma correspondência que associa cada círculo do plano a seu centro é uma função, porque todo círculo tem um centro e esse centro é único.*

Exemplo 2. *Uma correspondência que associa a cada conjunto formado por três pontos do plano o baricentro do triângulo que os têm por vértices **não** é função. Isso ocorre porque a suposta correspondência não está bem definida, pois se os três pontos forem colineares não teremos triângulo.*

2 Função real de variável real

Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita **real** se $B \subset \mathbb{R}$, ou seja, se seu contradomínio for um subconjunto do conjunto dos números reais. Isso significa que a imagem de cada elemento do domínio de f é um número real. Dizemos, ainda, que **f tem variável real** se $A \subset \mathbb{R}$, ou seja, se todo elemento de seu domínio for um número real.

Exemplo 3. A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, dada por $f(n) = n/2$, é real, pois seu contradomínio, o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, está contido no conjunto \mathbb{R} dos números reais. Ela também é uma função de variável real, pois seu domínio, o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros, está contido em \mathbb{R} .

Exemplo 4. A função que associa a cada retângulo do plano sua área é real mas não tem variável real. De fato, seu domínio é o conjunto dos retângulos do plano, que não está contido em \mathbb{R} .

Exemplo 5. A função f que associa a cada número inteiro o conjunto de seus divisores positivos tem variável real, pois seu domínio é formado por números inteiros, os quais são todos reais. Entretanto, ela não é uma função real, porque a imagem de cada elemento n do domínio é um conjunto, formado pelos divisores positivos de n . Por exemplo, $f(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Seja f uma função real de variável real, tal que a imagem $f(x)$ de cada x seja dada por uma fórmula (por exemplo, $f(x) = \sqrt{x}$). Frequentemente, é interessante encontrarmos o conjunto mais amplo possível que possa servir de domínio para f . Tal conjunto deve ser formado por todos os números reais x tais que $f(x)$ seja um número real. Esse conjunto é chamado **domínio maximal** da função f .

Em particular, se não for necessário impor restrições a x para que $f(x)$ tenha sentido, então o domínio maximal de f é todo o conjunto \mathbb{R} dos reais.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 6. A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, a princípio está definida apenas para x inteiro. Contudo, ela pode ser estendida a uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenha a mesma lei de formação: $f(x) = x^2$. De outra forma, não há razão para que restrinjamos o domínio de f , uma vez que x^2 tem sentido para todo x real. Assim, o domínio maximal dessa função é \mathbb{R} .

Exemplo 7. Considere $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, o conjunto dos números reais positivos. A função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, pode ser estendida para um conjunto maior? E a função $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

Solução. Em ambos os casos, \sqrt{x} aparece nas expressões que definem $f(x)$. Portanto, para que as imagens sejam números reais, x não pode ser negativo. Por isso, não podemos incluir números reais negativos nos domínios das funções f ou g .

Como $\sqrt{0} = 0 \in \mathbb{R}$, podemos incluir 0 no domínio da função f , ou seja, podemos estender a função para o conjunto $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ dos números reais não negativos.

No caso da função g , não podemos defini-la em 0 pela mesma fórmula, porque a substituição de x por 0 em $\frac{1}{\sqrt{x}}$ anularia o denominador dessa fração. Assim, o domínio \mathbb{R}_+^* de g não pode ser estendido, ou seja, \mathbb{R}_+^* é o domínio maximal da função g . \square

3 Imagem de uma função real

Nesta seção, recordaremos as definições das funções afim, recíproca e quadrática, bem como determinaremos suas imagens.

3.1 Imagem da função afim

Para $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é chamada **função afim**. Vamos investigar as possíveis imagens de uma função afim.

Se $a = 0$, então f é constante, já que sua regra se torna $f(x) = b$ para todo real x . Isso significa que $\text{Im } f = \{b\}$.

Se $a \neq 0$, vejamos que $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Para tanto, dado $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, basta verificar que a equação $f(x) = y_0$ (de 1º grau em x) admite uma solução real. O argumento é rotineiro: como $a \neq 0$,

$$f(x) = ax + b = y_0 \Leftrightarrow ax = y_0 - b \Leftrightarrow x = \frac{y_0 - b}{a}.$$

O leitor deve ter notado que se provou algo a mais: se f for uma função afim não constante, a equação $f(x) = y_0$ possui uma *única* solução real (a saber, $x = \frac{y_0 - b}{a}$).

Em resumo,

A imagem da função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é o conjunto unitário $\{b\}$ se $a = 0$, e é \mathbb{R} se $a \neq 0$.

Exemplo 8. Na Figura 1 vemos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0,01x + 2$. Embora esse gráfico pareça ser uma reta “quase” horizontal, tomando valores de x muito grandes tornamos o número $f(x)$ também muito grande. Por exemplo, para que seja $f(x) = 10^6$, basta tomarmos

$$x = \frac{10^6 - 2}{0,01} = 10^8 - 200 = 99999800.$$

Na mesma figura, para comparação, aparece uma reta horizontal pontilhada, passando pelo ponto $(0, 2)$.

3.2 Imagem da função recíproca

Consideremos, agora, a função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, chamada **função recíproca**. O número 0 não faz parte do domínio de f , pois o denominador em $1/x$ não pode se anular.

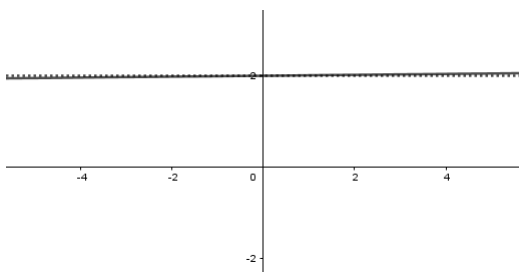


Figura 1: o gráfico da função dada por $f(x) = 0,01x + 2$ e a reta horizontal que passa pelo ponto $(0, 2)$.

Se $y_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, então $x_0 := \frac{1}{y_0} \in \mathbb{R} - \{0\}$ satisfaz $f(x_0) = y_0$. Realmente,

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1/y_0} = y_0.$$

Assim, todo número real diferente de zero pertence à imagem da função recíproca.

Por outro lado, se existisse $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $f(x_0) = 0$, então deveríamos ter $\frac{1}{x_0} = 0$, ou seja, $1 = x_0 \cdot 0 = 0$, o que não pode ocorrer. Isso significa que o número real 0 não faz parte da imagem de f . Portanto, a imagem da função recíproca é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

A figura 2 esboça o gráfico da função recíproca.

3.3 Imagem da função quadrática

Se a, b, c são números reais dados, com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

é chamada **função quadrática**. A exigência $a \neq 0$ é evidente, pois, se $a = 0$, a função f passa a ser afim.

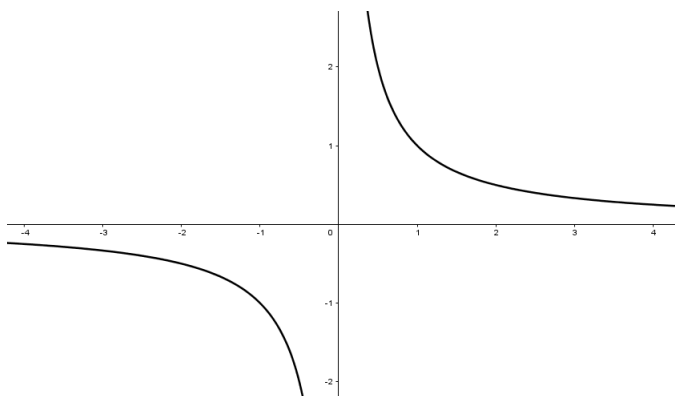


Figura 2: o gráfico da função recíproca, dada por $f(x) = 1/x$.

De acordo com os cálculos feitos na 1ª página da aula *Noções Básicas: Definição, Máximos e Mínimos do Módulo de Introdução à Função Quadrática*, podemos escrever f , definida por (1), em sua **forma canônica**:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right], \quad (2)$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o **discriminante** de f .

A forma canônica permite, com eficiência, discutir os (possíveis) zeros de f , o conjunto imagem, os pontos de máximo ou mínimo, etc.

Para utilizarmos (2) para obter a imagem da função quadrática f dada por (1), começamos observando que

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, pois o quadrado de um número real é sempre não negativo. Somando $-\frac{\Delta}{4a^2}$ a ambos os membros dessa desigualdade, vem que

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}, \quad (3)$$

também para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir daí, analisamos dois casos separadamente:

- Se $a > 0$, o sinal de desigualdade em (3) não muda ao multiplicarmos cada membro por a . Então, segue de (2) e (3) que

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Se $a < 0$, um argumento similar fornece

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, vale

$$\text{Im } f \subset \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right) \quad \text{ou} \quad \text{Im } f \subset \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right],$$

conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$. Podemos refinar essas relações, via (2), observando que, se $a > 0$ (resp. $a < 0$), então a função quadrática dada em (1) tem valor **mínimo** (resp. **máximo**) $-\frac{\Delta}{4a}$, o qual é atingido quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Afirmamos que as inclusões do parágrafo anterior são, na verdade, igualdades. Como os argumentos para a verificação da validade dessa afirmação nos casos $a > 0$ e $a < 0$ são análogos, trataremos apenas da situação em que a é positivo.

Para concluir que $\text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$ (quando $a > 0$), só precisamos mostrar que a equação $f(x) = y_0$ tem solução real para cada $y_0 \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$.

Utilizando a forma canônica (2) de f , vemos facilmente que

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta + 4ay_0}{4a^2}.$$

Como a hipótese “ $y_0 \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$ ” também se exprime pela desigualdade $\Delta + 4ay_0 \geq 0$, é lícito extrair a raiz quadrada

do 2º membro da igualdade anterior, de sorte que

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta + 4ay_0}}{2a},$$

isto é,

$$f(x) = y_0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta + 4ay_0}}{2a}.$$

Assim, para $y_0 \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ (e $a > 0$),

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta + 4ay_0}}{2a} \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta + 4ay_0}}{2a}$$

são (os únicos) números reais x tais que $f(x) = y_0$, de onde segue a afirmação. Observe que x_0 e x_1 coincidem se, e somente se, $y_0 = -\Delta/4a$ (o valor mínimo de f).

Observação 9. *A discussão acima, adaptada ao caso em que $y_0 = 0$, resulta no **critério do discriminante para a equação quadrática**: a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas soluções reais distintas, uma única solução real ou nenhuma solução real, conforme tenhamos $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. Além disso, no caso de haver soluções reais x , elas se exprimem por*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(Fórmula de Bháskara.)

Resumindo nossa discussão sobre a imagem de uma função quadrática, temos que:

(I) Se $a > 0$, a imagem da função quadrática dada em (1) é o intervalo $\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$.

(II) Se $a < 0$, a imagem da função quadrática dada em (1) é o intervalo $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Tendo em vista o que fizemos até aqui, a figura a seguir ilustra, tipicamente, o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

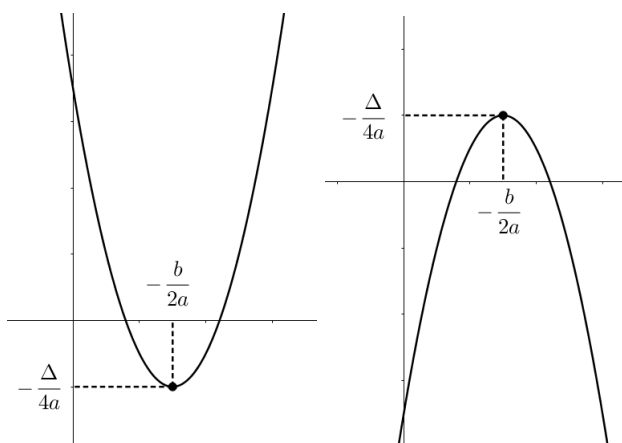


Figura 3: o gráfico da função quadrática, nos casos $a > 0$ (esquerda) e $a < 0$ (direita).

Na próxima aula, justificaremos o seguinte fato, aparente nos gráficos acima: a função quadrática f é decrescente (resp. crescente) em $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ e crescente (resp. decrescente) em $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ para $a > 0$ (resp. $a < 0$).

Dicas para o Professor

Convidamos o leitor a explorar outras funções além das expostas aqui. Uma rápida olhada nas aulas sobre funções exponenciais e logarítmicas vai lhe dar informações importantes sobre o domínio e a imagem dessas funções.

Outro exemplo interessante é a função real de variável real f , dada por $f(x) = x^3$. Essa função é sobrejetiva, ou seja, sua imagem é todo o conjunto dos números reais. Uma inspeção no gráfico dessa função dá uma ideia intuitiva desse fato, mas uma demonstração rigorosa requer o uso de um teorema

importante do Cálculo: o *Teorema do Valor Intermediário*¹. Faremos menção a esse problema em aulas futuras.

O material desta aula pode ser coberto em um ou dois encontros de 50 minutos cada.

A segunda parte deste material discutirá vários exemplos interessantes envolvendo funções. Nas sugestões de leitura a seguir, você encontrará outros tantos, em níveis de dificuldade variados.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 3. 7^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. *Introdução à Análise*. 3^a ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

¹A sobrejetividade da função cúbica $x \mapsto x^3$ também decorre do teorema de existência de raízes n -ésimas; confira o exemplo 15 da aula *Continuidade em um Ponto - Parte II*, no módulo *Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas*.