Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Continuidade em um ponto - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Janeiro de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Vimos na primeira parte desse material, por meio do princípio dos intervalos encaixantes, que um número real fica univocamente determinado a partir de sequências de aproximações por falta e por excesso. É possível "quebrar a simetria" na formulação desse princípio. De modo mais preciso, provaremos abaixo (vide teorema 18) que um número real também fica determinado apenas por uma sequência de aproximações por falta (ou por excesso). A discussão que segue estabelecerá esse fato de uma forma equivalente.

Antes, contudo, apresentemos mais uma aplicação do princípio dos intervalos encaixantes.

Diremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *localmente constante* se cada ponto $a \in X$ for centro de um intervalo aberto J de tal modo que a restrição $f|X \cap J$ é constante. Por exemplo, se $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira do número real x, então a função $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é localmente constante. Também é claro que toda função constante é localmente constante. A recíproca desse fato, falsa em geral, é verdadeira se o domínio da função for um intervalo, de acordo com o

Exemplo 1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função localmente constante definida num intervalo I. Então, f é constante.*

Solução. Supondo, por contradição, que f não seja constante, existem pontos $a,b \in I$, com $a < b$, tais que $f(a) \neq f(b)$. Agora utilizaremos o método das bisseções sucessivas. Certamente, vale $f(a) \neq f(\frac{a+b}{2})$ ou $f(\frac{a+b}{2}) \neq f(b)$, de modo que em uma das metades $[a_2,b_2]$ de $[a_1,b_1] := [a,b]$ se verifica $f(a_2) \neq f(b_2)$. Esse argumento pode ser repetido para definir (por indução) uma sequência encaixante e colapsante $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos satisfazendo

$$f(a_n) \neq f(b_n), \tag{1}$$

para cada natural n. Por um lado, o princípio dos intervalos encaixantes garante a existência de um número real $c \in I$ pertencente a cada intervalo $[a_n,b_n]$; por outro, a hipótese assegura que, para algum $\varepsilon > 0$, a restrição da função f a

$I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ é constante. Como a sequência $([a_n, b_n])$ é colapsante, existe algum intervalo $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ cujo comprimento é menor que ε. Daí,

$$\begin{aligned} & |a_{n_0} - c|, |b_{n_0} - c| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow\, & a_{n_0}, b_{n_0} \in I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \\ \Rightarrow\, & f(a_{n_0}) = f(b_{n_0}), \end{aligned}$$

contradizendo (1). Portanto, f é uma função constante. $\square$

2 Supremo e ínfimo

Diremos que um subconjunto X da reta $\mathbb{R}$ é *limitado superiormente* se existe um número real b satisfazendo $x \leq b$, para cada $x \in X$. Nesse caso, b é dito uma *cota superior* de X.

De forma similar, um número real a é dito uma *cota inferior* de X caso, para todo $x \in X$, ocorra $a \leq x$. Um conjunto X é *limitado inferiormente* se admitir uma cota inferior.

Observação 2. *Seguem das definições as seguintes equivalências* [1]*:* X é limitado superiormente se, e só se, $-X$ é limitado inferiormente*;* b é cota superior de X se, e somente se, $-b$ é cota inferior de $-X$.

Exemplo 3. *Se I é um intervalo de extremos α e β, com $\alpha < \beta$, então qualquer número real $b \geq \beta$ (resp. $a \leq \alpha$) é uma cota superior (resp. inferior) de I.*

Exemplo 4. $\mathbb{N}$ *é limitado inferiormente (mais ainda,* $1 = \min \mathbb{N}$*). A afirmação "$\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente" é uma forma equivalente de enunciar a propriedade arquimediana de* $\mathbb{R}$*.*

Se um conjunto X de números reais admitir uma *menor* cota superior β, diremos que β é o *supremo* de X e escrevemos $\beta = \sup X$. Por exemplo, qualquer intervalo limitado superiormente tem seu extremo superior como supremo.

[1] Por definição, $-X := \{-x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 5. *Afirmamos que* $0 = \sup Q^-$*, sendo* Q^- *o conjunto dos números racionais negativos. De fato, é claro que* 0 *é uma cota superior de* Q^-*. Por outro lado, dado um número real* $a < 0$*, a densidade dos racionais (demonstrada na proposição 2 da 1ª parte dessa aula) garante a existência de um número racional* r *no intervalo* $(a,0)$*. Como* $r \in Q^-$*, a desigualdade* $a < r$ *impede que* a *seja uma cota superior de* Q^-*. Assim,* 0 *é a menor das cotas superiores de* Q^-*, justificando a afirmação.*

Exemplo 6. *Digamos que* $X \subset \mathbb{R}$ *admita um elemento máximo* ω*:* $\omega \in X$ *e* $x \leq \omega$*, para cada* $x \in X$*. Então,* $\omega = \sup X$*. Por outro lado, o intervalo aberto* $(0,1)$ *admite* 1 *como supremo, muito embora não haja maior elemento nesse intervalo. Desse modo, a noção de supremo generaliza a noção de maior elemento.*

Em referência ao exemplo anterior, se X admite supremo, então X possui elemento máximo se, e só se, $\sup X \in X$ (e, nesse caso, $\sup X = \max X$). Isso sugere uma estratégia, em dois passos, para mostrar que um conjunto X admite um maior elemento: 1º - *existência* de $\sup X$; 2º - pertinência $\sup X \in X$ (para uma aplicação dessa ideia, veja o exemplo 24 da próxima aula). A existência do supremo de um conjunto é tratada no

Teorema 7. *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Prova. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. Assim, o conjunto Y das cotas superiores de X é não vazio e vale $x \leq y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Portanto, a propriedade da completude de $\mathbb{R}$ garante a existência de $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \leq \beta \tag{2}$$

e

$$\beta \leq y, \tag{3}$$

sejam quais forem os elementos $x \in X$ e $y \in Y$. A desigualdade (2) garante a pertinência $\beta \in Y$; a segunda, diz que β é o menor elemento de Y, ou seja, $\beta = \sup X$, como queríamos. $\square$

Simetricamente à noção de supremo, temos a noção de *ínfimo*: se a for a *maior* cota inferior de um conjunto X, diz-se que a é o ínfimo de X e escreve-se $a = \inf X$. Por exemplo, $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, sendo tal igualdade mais uma releitura do princípio arquimediano.

Deixamos ao encargo do leitor adaptar para "inf" os exemplos acima formulados para "sup". Em particular, a noção de ínfimo generaliza a noção de menor elemento.

Observação 8. *A relação*

$$\inf X = -\sup(-X) \tag{4}$$

permite obter, para cada resultado enunciado relativamente à noção de supremo, uma versão formulada em termos de ínfimo. Para justificar (4)*, levamos em consideração a observação 2, de modo que, se Y é o conjunto das cotas inferiores de X, então $-Y$ é o conjunto das cotas superiores de $-X$ e* $\max Y = -\min(-Y)$ [2]*, o que dá a relação desejada.*

Quanto ao teorema anterior, temos a seguinte versão:

Teorema 9. *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado inferiormente, admite ínfimo.*

A demonstração segue os mesmos passos da prova do teorema 7. Alternativamente, sendo X não vazio e limitado inferiormente, então, pela observação 2, $-X$ satisfaz as condições no teorema 7, de sorte que existe $\beta = \sup(-X)$ e, pela relação (4), $\alpha = -\beta$ é o ínfimo de X.

O próximo exemplo coleciona algumas propriedades úteis, relativamente aos conceitos de ínfimo e supremo.

Exemplo 10. *Sejam A, A' e B conjuntos não-vazios de números reais.*

[2] Igualdade válida sempre que um qualquer dos membros fizer sentido.

i) *Se $x \leq y$, para quaisquer $x \in A, y \in B$, então* $\sup A \leq \inf B$.

ii) *Se A, A' são limitados superiormente (resp. inferiormente) e $A' \subset A$, então* $\sup A' \leq \sup A$ *(resp.* $\inf A' \geq \inf A$*).*

Solução. Para o primeiro item, note que cada elemento $y \in B$ é uma cota superior de A, de modo que $\sup A \leq y$, para todo $y \in B$, uma vez que $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A. Portanto, $\sup A$ é uma cota inferior de B, o que implica $\sup A \leq \inf B$, já que $\inf B$ é a maior das cotas inferiores de B.

Quanto a ii), deixamos como encargo ao leitor verificar o seguinte fato: se Y, Y' admitem elementos mínimos (resp. máximos) e $Y \subset Y'$, então $\min Y' \leq \min Y$ (resp. $\max Y' \geq \max Y$) [3]. Portanto, como $A' \subset A$, toda cota superior de A também é uma cota superior de A', isto é, $Y \subset Y'$, sendo Y (resp. Y') o conjunto das cotas superiores de A (resp. A'). Logo, $\sup A' = \min Y' \leq \min Y = \sup A$. A justificativa da relação $\inf A' \geq \inf A$, para o caso de A, A' serem limitados inferiormente, segue os mesmos passos da anterior. □

3 Aplicações

3.1 A equação de Cauchy

Um conjunto X de números reais é dito *limitado* se for limitado inferior e superiormente. Por exemplo, todo conjunto finito é limitado. Também é claro que cada intervalo de extremos $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Em verdade, segue imediatamente da definição que X é limitado se, e só se, X é subconjunto de algum intervalo $[\alpha,\beta]$. Da inclusão $[\alpha,\beta] \subset [-M,M]$, com $M = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$, vemos que X é limitado se, e somente se, vale $|x| \leq M$, para alguma constante positiva M e para todo $x \in X$.

[3] Dessa forma, a 2ª parte desse exemplo generaliza um resultado válido para elementos máximos e mínimos.

Uma função f é dita limitada (resp. limitada inferiormente, limitada superiormente) se sua imagem $\mathrm{Im}(f)$ for um conjunto limitado (resp. limitado inferiormente, limitado superiormente). Por exemplo, cos e sen são funções limitadas. Uma função g da forma $g(x) = f(x)^2$ é limitada inferiormente (podendo ser ilimitada superiormente, e.g., tomando-se $f(x) = x$). Por fim, funções afins e não identicamente nulas são ilimitadas inferior e superiormente.

Exemplo 11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função* aditiva, *isto é, tal que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{5}$$

quaisquer que sejam $x,y \in \mathbb{R}$. Se f for limitada em algum intervalo limitado, então f é limitada em cada intervalo limitado.

A equação (5) é conhecida na literatura como **equação de Cauchy**.

Antes de iniciar a prova desse exemplo, vamos deduzir algumas consequências da equação funcional acima.

1. $f(nx) = nf(x), \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: verifica-se, por indução, a igualdade $f(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$, para quaisquer números reais $x_1, \ldots ,x_n$; tomando $x_1 = \ldots = x_n = x$, obtem-se a relação desejada.

2. $f(0) = 0$: isso segue da lei do corte, pois $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$.

3. $f(x-y) = f(x)-f(y)$: de fato, $f(x) = f(y+(x-y)) = f(y) + f(x - y)$.

4. f é ímpar: basta, agora, notar que $f(-x) = f(0 - x) = f(0) - f(x) = -f(x)$.

Prova do Exemplo 11. Suponhamos que f seja limitada no intervalo $[a,b]$ $(a < b)$, com $|f(x)| \leq K$, para cada $x \in [a,b]$. Pondo $c := b - a$ e $M := K + |f(a)|$, afirmamos inicialmente que $|f(x)| \leq M$, se $|x| \leq c$. De fato, sendo f uma função ímpar, podemos supor $0 \leq x \leq c$, ou seja, $a \leq a + x \leq b$. Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(a+x) - f(a)| \\ &\leq |f(a+x)| + |f(a)| \\ &\leq K + |f(a)| = M.\end{aligned}$$

Agora, dado um intervalo limitado qualquer I, vale $I \subset [-n_0c, n_0c]$ para algum número natural n_0 suficientemente grande. Portanto, se $y \in I$, então $y = n_0x$, com $|x| \leq c$, o que dá $|f(y)| = n_0|f(x)| \leq n_0M$. Isso demonstra que f é limitada em I. □

O exemplo anterior implica o seguinte resultado.

Proposição 12. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva e limitada em algum intervalo limitado, então f é uma função linear: pondo $a = f(1)$, temos $f(x) = ax$, para cada número real x.*

Prova. [4] Se f é aditiva e limitada em algum intervalo limitado, então o mesmo se pode dizer da função g definida por $g(x) = f(x) - ax$, para $x \in \mathbb{R}$. Todavia, como $g(1) = 0$, a função g deve ser periódica, admitindo 1 como um período: $g(x+1) = g(x) + g(1) = g(x)$, para todo x. Sendo as imagens de g e da restrição de g ao intervalo $[0,1]$ iguais, o fato de g ser limitada em $[0,1]$ (a qual segue do exemplo 11) garante a limitação de g.

Afirmação: g é identicamente nula.

De fato, suponha $|g(x)| \leq M$, para todo x. Assim, para $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$n|g(x)| = |g(nx)| \leq M \Rightarrow |g(x)| \leq M/n.$$

Fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade anterior, concluímos (por permanência do sinal) a desigualdade $|g(x)| \leq 0$, ou seja, $g(x) = 0$. Pela arbitrariedade de x, fica provada a afirmação.

Concluímos, então, que $f(x) = ax$, para cada $x \in \mathbb{R}$. □

[4] Seguimos a referência [2].

Observação 13.

i) *Como toda função monótona* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é limitada em intervalos limitados, fica estabelecida a seguinte proposição:* se f é uma função real de uma variável real, aditiva e monótona, então f é uma função linear.

ii) *Com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar (veja a referência [4]) que existem infinitas funções reais de uma variável real aditivas mas não monótona (logo, não lineares).*

3.2 Caracterização dos intervalos

Dizemos que um número real a é um *valor intermediário* do conjunto $J \subset \mathbb{R}$ se existirem pontos $b,c \in J$ tais que $b \leq a \leq c$. Se $VI(J)$ é o conjunto formado pelos valores intermediários de $J \neq \varnothing$, veremos agora que $VI(J)$ é um intervalo (certamente contendo J, e não degenerado, caso J contenha pelo menos dois elementos).

De fato, digamos que J seja limitado e sejam $\alpha = \inf J$ e $\beta = \sup J$. Dado $a \in VI(J)$, vale $\alpha \leq b \leq a \leq c \leq \beta$, para certos $b,c \in J$, de forma que $a \in [\alpha,\beta]$. Isso prova a inclusão $VI(J) \subset [\alpha,\beta]$. Por outro lado, dado $x \in (\alpha,\beta)$, temos que x não é cota inferior nem cota superior de J, de modo que existem $y,z \in J$ tais que $y < x < z$. Conclui-se, assim, que $x \in VI(J)$, ou melhor, $(\alpha,\beta) \subset VI(J)$. Ora, as inclusões $(\alpha,\beta) \subset VI(J) \subset [\alpha,\beta]$ dizem que $VI(J)$ é um intervalo de extremos α e β, como queríamos.

Os demais casos, em que J é ilimitado inferior e/ou superiormente, são tratados de forma semelhante. Por exemplo, se J for limitado inferiormente mas ilimitado superiormente, uma adaptação do argumento acima prova que $VI(J)$ é um intervalo de extremos $\alpha = \inf J$ e $+\infty$.

Como $VI(J)$ é um intervalo contendo J, é fácil verificar que J será um intervalo se, e só se, ocorrer a inclusão reversa $VI(J) \subset J$ (caso em que $VI(J) = J$). Daí, obtemos a

Proposição 14. *Um conjunto não vazio de números reais é* *um intervalo se, e somente se, esse conjunto contém cada um dos seus valores intermediários.*

3.3 Raízes n-ésimas

Aplicaremos a proposição acima ao seguinte

Exemplo 15. *Se a é um número real positivo e n é um número natural, considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \text{ e } x^n < a\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y > 0 \text{ e } a < y^n\}$. Então, $\sup A = \inf B$ e, definindo $b = \sup A$, tem-se que $b^n = a$.* [5]

Prova. Primeiro observe que A e B são não vazios: as igualdades equivalentes

$$\lim_{x\to 0^+} x^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to +\infty} y^n = +\infty$$

mostram que todo número positivo suficientemente pequeno c satisfaz $c^n < a$ e que todo número suficientemente grande d cumpre $a < d^n$.

Agora, se y é um valor intermediário do conjunto A, com $x \le y \le z$ e $x,z \in A$, então $y > 0$ e $y^n \le z^n < a$, de modo que $y \in A$. Pela proposição anterior, A é um intervalo de extremos 0 e $b = \sup A$. Do mesmo modo conclui-se que B é um intervalo de extremos $\beta := \inf B$ e $+\infty$.

Como $A \cap B = \varnothing$, vale $b \le \beta$ (tal desigualdade também é uma consequência do exemplo 10). Se tivéssemos $b < \beta$, qualquer ponto t do intervalo aberto (b,β), por não pertencer a qualquer um dos conjuntos A ou B, satisfaria $t^n = a$, contrariando a injetividade da função $0 \le x \mapsto x^n$. Portanto, $b = \beta$.

Finalmente, uma vez que $x^n < a$ (resp. $y^n > a$), para cada $x \in A$ (resp. $y \in B$), obtemos, pela permanência do sinal, $b^n = \lim_{x\to b^-} x^n \le a$ (resp. $b^n = \lim_{y\to b^+} y^n \ge a$). Logo, $b^n = a$. □

Observação 16. *O exemplo acima estabelece a existência de raízes n-ésimas a partir da completude de $\mathbb{R}$. É interessante*

[5] Por definição, $b = \sqrt[n]{a}$.

notar que, de um ponto de vista geométrico, raízes quadradas podem ser construídas. Mais precisamente, dado um quadrado de área a, é possível construir com régua e compasso seu lado (que tem comprimento $\sqrt{a}$). Isso não ocorre para todas as raízes n-ésimas. Por exemplo, o problema análogo tridimensional é insolúvel com $a = 2$: é impossível construir, com régua e compasso, a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo unitário. *De outro modo, é impossível construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ com régua e compasso.*

3.4 Aproximações por falta/excesso

Diz-se que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de aproximações por falta (resp. por excesso) se (a_n) for limitada e monótona não decrescente (resp. não crescente): $a_m \leq a_n$ (resp. $a_m \geq a_n$) para quaisquer naturais m,n com $m \leq n$. Por exemplo, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de aproximações por excesso (do número 0).

Exemplo 17. *Se $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, então (a_n) é uma sequência de aproximações por falta. Com efeito, a soma definindo a_n é telescópica, como se vê a partir da relação $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

A igualdade $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ nos diz, á um só tempo, que (a_n) é crescente e limitada (temos $0 < a_n < 1$, para cada natural n). Mais ainda, (a_n) é uma sequência de aproximações por falta do número 1.

Em conformidade com os exemplos anteriores, veremos agora que os termos de uma sequência de aproximações, de fato, *devem aproximar algum número.* Mais precisamente,

Teorema 18. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Prova. Digamos que (a_n) seja uma sequência limitada e monótona não decrescente. Devemos mostrar que $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe. Pelas hipóteses, um candidato natural ao limite de (a_n) é o supremo $L = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ do conjunto dos termos dessa sequência, cuja existência é garantida pelo teorema 7 (já que (a_n) é limitada). Em particular, para cada n natural, tem-se

$$a_n \leq L. \tag{6}$$

Agora, dada uma estimativa de erro $\varepsilon > 0$, temos que $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto dos termos da sequência, visto que L já é a menor delas. Portanto, algum termo a_{n_0} satisfaz $L - \varepsilon < a_{n_0}$. Desse modo, a monotonicidade de (a_n) garante que $n > n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq a_n$, logo,

$$L - \varepsilon < a_n, \tag{7}$$

para cada $n > n_0$. Das relações (6) e (7), concluímos que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq L$, ou melhor,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon;$$

isso estabelece a igualdade $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

De modo análogo, se (a_n) for limitada e monótona não crescente, prova-se que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Observação 19.

i) *O resultado anterior está para o teorema 7 assim como o princípio dos intervalos encaixantes está para a completude de $\mathbb{R}$.*

ii) *Sem a hipótese de limitação no teorema anterior, o limite da sequência ainda existe e é infinito. Mais precisamente, se (a_n) for uma sequência monótona não decrescente (resp. não crescente) e* ilimitada, *então $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). A prova dessas afirmações será deixada como exercício.*

Exemplo 20. *Mostre que a sequência* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

Prova. Vejamos que a sequência $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ é crescente e limitada. Ela é crescente pelo exemplo 5 da aula *Desigualdades Elementares - Parte 3* do módulo de desigualdades.

Para estabelecer sua limitação, utilizaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (vide teorema 1 da aula *Desigualdades Elementares - Parte 2*) com os $n+1$ números $1/2, 1/2, 1, \ldots, 1$, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1} &= \frac{1/2+1/2+1+\cdots+1}{n+1}\\ &\geq \sqrt[n+1]{1/2\cdot 1/2\cdot 1\cdots 1}\\ &= \sqrt[n+1]{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Portanto, $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\leq \sqrt[n+1]{4}$, implicando

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4,$$

o que dá $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$, para cada n natural.

Assim, o teorema 18 assegura que a sequência $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$

Observação 21. *O* ***número de Euler****, denotado e, é definido pela igualdade*

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Trata-se de um número irracional [6]*, admitindo a aproximação* $e\cong 2{,}71828$*, com* 5 *casas decimais exatas.*

[6] Até mesmo *transcendente*, ou seja, e não é raiz de um polinômio (não identicamente nulo) a coeficientes inteiros.

3.5 Existência de limites laterais

O próximo resultado, enunciado na aula *Limites Laterais* do módulo anterior (vide teorema 8 dessa aula), é uma versão do teorema 18 para funções reais de uma variável real. Recomendamos que o leitor retorne à seção 2 daquele material para recordar as noções pertinentes ao entendimento do teorema que segue.

Teorema 22. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona.*

i) Se o limite à esquerda de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à esquerda de a, então existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

ii) Se o limite à direita de f no ponto a fizer sentido e f for limitada à direita de a, então existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Prova. Suponhamos que f seja monótona não-decrescente (como esperado, o caso "f é monónota não crescente" é completamente similar).

Nas hipóteses do item i), o conjunto $A = \{f(x) \,|\, x \in X \text{ e } x < a\}$ é não vazio e limitado superiormente. Portanto, pelo teorema 7, existe $L = \sup A$.

Afirmação: $L = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Com efeito, dado um número real positivo ε, o número $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto A. Portanto, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 < a$ e $L-\varepsilon < f(x_0)$. Logo, $\delta := a-x_0$ é um número positivo e $0 < a - x < \delta \Rightarrow a > x > x_0$. Assim, pela monotonicidade de f,

$$x \in X, 0 < a - x < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L,$$

de onde segue que

$$x \in X,\ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

justificando a afirmação feita.

Quanto ao limite à direita de f em a, agora nas hipóteses do item ii), deixaremos a cargo do leitor a prova da igualdade $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf B$, onde $B = \{f(t) \,|\, t \in X \text{ e } a < t\}$. $\square$

Observação 23.

i) *Perceba as semelhanças entre as demonstrações dos teoremas 18 e 22.*

ii) *No contexto do teorema anterior, vale uma observação análoga àquela registrada em 19, ii).*

3.6 Mais um exemplo

Exemplo 24. *Calcule o supremo do conjunto $\mathcal{N}$ das somas*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}, \tag{8}$$

sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo qualquer.

Prova. Pela desigualdade triangular, temos $a < b+c$, o que implica $a+(b+c) < 2(b+c)$, ou ainda, $1/(b+c) < 2/(a+b+c)$. Logo,

$$\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

De forma similar, temos

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Somando, membro a membro, as três desigualdades acima, obtemos

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$$

Assim, 2 é uma cota superior do conjunto $\mathcal{N}$.

Mais ainda, 2 é a *menor* cota superior de $\mathcal{N}$. Com efeito, para cada número natural n, sejam $a_n = 1$ e $b_n = c_n = n$, de modo que a_n, b_n e c_n são as medidas dos lados de um triângulo isósceles. Como

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n+c_n}+\frac{b_n}{c_n+a_n}+\frac{c_n}{a_n+b_n}\right)=\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2}{1+1/n}\right)=2,
\end{aligned}$$

dado $\beta<2$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ satisfazendo

$$\tfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}+c_{n_0}}+\tfrac{b_{n_0}}{c_{n_0}+a_{n_0}}+\tfrac{c_{n_0}}{a_{n_0}+b_{n_0}}>\beta$$

(permanência do sinal). Conclui-se que β não é cota superior de $\mathcal{N}$ e, portanto, 2 é a menor cota superior de $\mathcal{N}$, isto é, $\sup\mathcal{N}=2$. □

Observação 25. *Em complemento à desigualdade apresentada no exemplo anterior, temos a* desigualdade de Nesbitt

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, \tag{9}$$

válida para quaisquer *números positivos a, b e c. Além disso, ocorre a igualdade em* (9) *se, e só se, $a=b=c$ (vide [3], problema 8 da seção 7.4).*

Dicas para o Professor

Em relação à observação 16, veja o apêndice da referência [1]. Lá, você encontrará uma discussão sobre os problemas clássicos gregos da *duplicação do cubo, trisseção do ângulo e quadratura do círculo.* A insolubilidade de tais problemas, determinada entre os séculos XVIII e XIX (com ferramentas algébricas!), destaca a diferença entre *número* (real) e *número construtível.* Muitos números reais (na verdade, a "maioria" deles) não são o resultado de uma construção com régua e compasso. Por exemplo, $\sqrt[3]{2}$, $\cos 20°$ e π (o que, respectivamente, estabelece a insolubilidade dos problemas mencionados anteriormente). O número de Euler, e, também não é construtível [7].

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. Wagner. *Construções Geométricas*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

2. C. G. Small. *Functional Equations and How to Solve Them*. Springer, 2007.

3. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 1. Números Reais*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

4. C. Goffman. *Real Functions*. Nova Iorque: Rinehart, 1953.

[7]Prova-se que todo número construtível é *algébrico*, ou seja, é raiz de um polinômio de grau positivo e coeficientes inteiros. Portanto, números transcendentes, isto é, não algébricos, como π e e, são não construtíveis.