Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Exercícios Variados - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

26 de outubro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercicícios variados

Neste material, continuamos a apresentar exercícios envolvendo conteúdos variados.

Exemplo 1 (ENEM - 2013). *Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas comprará, ele analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresentar o maior lucro médio anual. O quadro a seguir traz, para cada empresa, o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo de seu tempo de existência (em anos).*

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

Com base nas informações acima, podemos afirmar que o empresário decidiu comprar a empresa:

(a) F.

(b) G.

(c) H.

(d) M.

(e) P.

Solução. Na próxima tabela, listamos os lucros médios (lucro $\div$ tempo) anuais das empresas citadas no problema. Ao

Empresa	**Lucro médio anual (em milhões de reais por ano)**
F	$24 \div 3 = 8$
G	$24 \div 2 = 12$
H	$25 \div 2{,}5 = 10$
M	$15 \div 1{,}5 = 10$
P	$9 \div 1{,}5 = 6$

observá-la, percebemos prontamente que a empresa que apresentou o maior lucro médio anual foi G, logo, a alternativa correta é a letra **(b)**.

□

Exemplo 2 (ENEM - 2013). *Um dos grandes problemas enfrentados pelas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.*

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar no máximo 1500 *telhas ou* 1200 *tijolos. Considerando esse caminhão carregado com* 900 *telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?*

(*a*) 300 *tijolos.*

(*b*) 360 *tijolos.*

(*c*) 400 *tijolos.*

(*d*) 480 *tijolos.*

(*e*) 600 *tijolos.*

Solução. Veja que a razão entre as quantidades máximas de tijolos e de telhas que o caminhão pode carregar é igual a

$$\frac{1200}{1500} = \frac{4}{5}.$$

Isso significa que cada 5 telhas pesam o mesmo que 4 tijolos. Como o caminhão já está carregado com 900 telhas, ainda há espaço para $1500 - 900 = 600$ telhas. Mas essas 600 telhas correspondem a

$$\frac{600}{5} \cdot 4 = 480 \text{ tijolos.}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Uma solução alternativa para o exemplo anterior é a seguinte: como o caminhão tem capacidade para 1500 telhas e já está carregado com 900 telhas, a fração já utilizada, do peso que o caminhão pode carregar, é

$$\frac{900}{1500} = \frac{3}{5}.$$

Desse modo, a fração que ainda está livre, do peso que o caminhão pode levar, é $\frac{2}{5}$. Portanto, a quantidade de tijolos que o caminhão ainda pode transportar, além das 900 telhas, é

$$\frac{2}{5} \cdot 1200 = 2 \cdot 240 = 480.$$

Exemplo 3 (CMBel - 2019). *Para garantir a acessibilidade aos Colégios Militares do Brasil, foram colocados elevadores em alguns estabelecimentos de ensino para facilitar a locomoção de crianças e adultos. Os elevadores têm capacidade máxima de* 20 *crianças ou* 12 *adultos. Sendo assim, o número máximo de crianças que podem subir com* 9 *adultos é de:*

(*a*) 3.

(*b*) 4.

(*c*) 7.

(d) 8.

(e) 5.

Solução. Procedamos como na solução alternativa do exemplo anterior.

Tendo em vista que o elevador pode levar até 12 adultos (sem crianças) e já está com 9 adultos, a fração da capacidade máxima do elevador que está ocupada é

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Assim, a fração que falta para completar a capacidade máxima é $\frac{1}{4}$.

Uma vez que o elevador pode levar até 20 crianças (sem adultos), para completar essa fração de $\frac{1}{4}$ da capacidade apenas com crianças, podemos colocar até

$$\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$$

crianças.

Portanto, ainda podem subir, no máximo, 5 crianças no elevador. Logo, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 4 (ENEM - 2013). *Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabendo que cada gota d'agua tem volume de* 0,2*ml, pergunta-se: dentre as alternativas a seguir, qual traz o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?*

(a) 0,2.

(b) 1,2.

(c) 1,4.

(d) 12,9.

(e) 64,8.

Solução. Inicialmente, observe que a torneira ficou gotejando durante seis horas, ou seja, foram

$$6 \cdot 60 \cdot 60 = 21600$$

segundos de desperdício. Como a frequência do gotejamento é de uma gota a cada três segundos, obtemos um total de

$$21600 \div 3 = 7200$$

gotas d'água desperdiçadas, desde a meia-noite até as seis horas da manhã. Agora, uma vez que cada gota tem o volume aproximado de 0,2 ml, o total de água desperdiçada foi de

$$7200 \cdot 0{,}2 = 1440 \text{ ml},$$

o que corresponde a

$$\frac{1440}{1000} \text{ L} = 1{,}44 \text{ L}.$$

Portanto, dentre as opções dadas, o valor mais aproximado é o que aparece na alternativa **(c)**. □

Exemplo 5 (ENEM - 2013). *A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza uma bicicleta para cada aluno de uma escola municipal, a qual deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre a casa do aluno e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura a seguir, na escala* $1 : 25000$*, por um período de cinco dias. Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?*

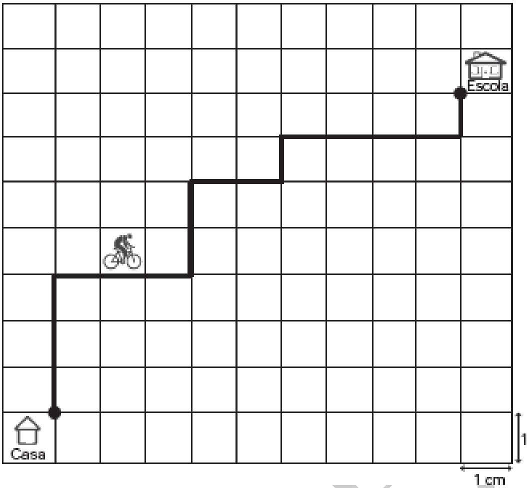
(*a*) 4.

(*b*) 8.

(*c*) 16.

(*d*) 20.

(*e*) 40.



Solução. Observando a figura, notamos que o trajeto do aluno entre sua casa e a escola corresponde a 16 lados (iguais) dos quadradinhos que formam a malha quadriculada. Desse modo, na figura a distância entre a casa do aluno e a escola é igual a 16cm, o que corresponde a uma distância real de

$$16 \cdot 25000 = 400000 \text{ cm} = 4 \text{ km}.$$

Contando ida e volta, vemos que o aluno percorre $2 \cdot 4 = 8$km por dia. Portanto, durante os cinco dias da fase de implantação do programa, ele percorreu um total de

$$5 \cdot 8 = 40 \text{ km}.$$

Assim, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 6 (OBM). *No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a* 1*cm de distância um do outro. Assinale a alternativa que corresponde à área da região sombreada, em cm*^{2}*:*

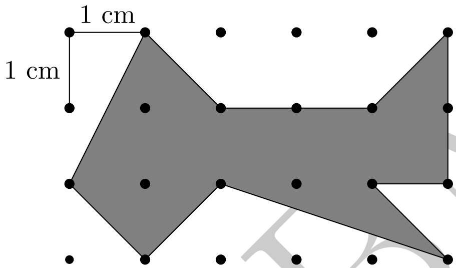
(*a*) 7.

(*b*) 8.

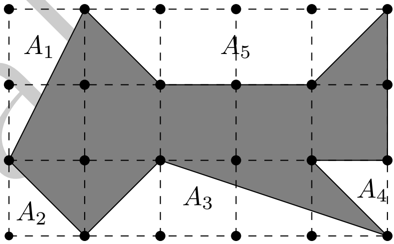
(*c*) 8,5.

(*d*) 9.

(*e*) 9,5.



Solução. Vamos completar o retângulo que dá forma ao reticulado, calcular a área desse retângulo e calcular as áreas dos polígonos cuja soma representa a diferença entre a área sombreada e a área do retângulo. Depois disso, para calcular a área da região pedida no problema, basta subtrair a soma das áreas dos polígonos da área do retângulo.



A área do retângulo é igual a

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^2.$$

Por outro lado, também em cm^2, temos

$$A_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad A_2 = A_4 = 0{,}5, \quad A_3 = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$$

e

$$A_5 = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3.$$

Portanto, em cm^2,

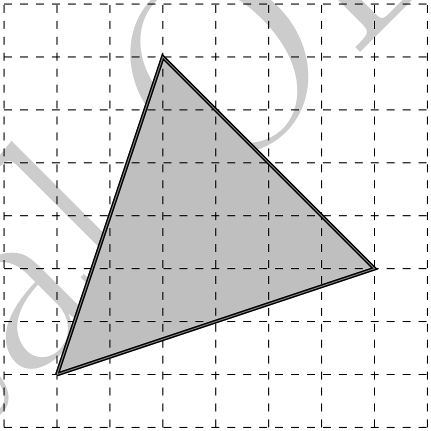
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 1 + 0{,}5 + 2 + 0{,}5 + 3 = 7.$$

Assim, a área sombreada é igual a

$$15 - 7 = 8 \text{ cm}^2.$$

□

Exemplo 7 (CMF - 2016). *Durante um treinamento dos cadetes da Academia Militar das Agulhas Negras, foi distribuído um mapa de uma região minada, representada pela região pintada na malha quadriculada abaixo, formada por quadrados idênticos, cada um com 1 km^2 de área.*



Além de atravessar o terreno em segurança, os cadetes deveriam calcular a área da região minada. Caso acertem, a resposta será:

(a) 14,5 km^2.

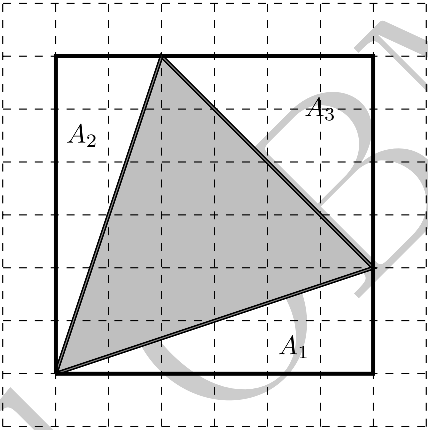
(b) 15,0 km^2.

(c) 15,5 km^2.

(d) 16,0 km^2.

(e) 16,5 km^2.

Solução. Repetindo a ideia utilizada na solução do exemplo anterior, observe (acompanhe na figura abaixo) que a medida do lado de cada quadradinho da malha quadriculado é igual a 1 km, pois a área de cada quadradinho é igual a 1 km^2.



Calculando as áreas A_1, A_2 e A_3, obtemos

$$A_1 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ km}^2,$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6 \text{ km}^2$$

e

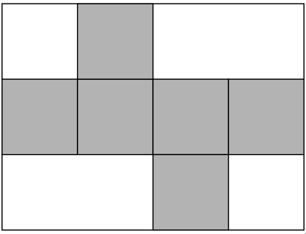
$$A_3 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ km}^2.$$

Portanto, a área sombreada é igual a

$$36 - (6 + 6 + 8) = 36 - 20 = 16 \text{ km}^2.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 8 (CMRJ - 2008). *A figura abaixo representa uma folha de papel retangular, onde estão destacados 6 quadrados.*



Com a parte destacada dessa folha, pode-se montar um cubo. Se a área da folha é $432cm^2$*, o volume desse cubo, em* cm^3*, é:*

(a) 8.

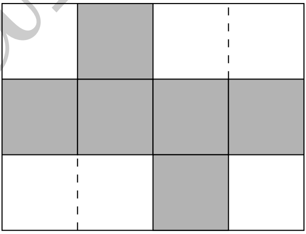
(b) 27.

(c) 64.

(d) 125.

(e) 216.

Solução. Veja que o retângulo pode ser dividido em 12 quadrados iguais aos que foram destacados.



Assim, como a área do retângulo é igual a 432 cm^2, concluímos que a área de cada quadrado é igual a

$$432 \div 12 = 36 \text{ cm}^2.$$

Logo, a medida do lado de cada quadrado, que é igual à medida da aresta do cubo, é igual a 6 cm. Portanto, o cubo tem volume igual a

$$V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

Assim, a alternativa correta é a letra **(e)**. $\square$

Exemplo 9 (CMF - 2016). *Um recipiente, na forma de um paralelepípedo com dimensões internas $20cm \times 10cm \times 5cm$, contém 8 cubos de gelo com dimensões $3cm \times 3cm \times 3cm$. Despeja-se, no recipiente, $800ml$ de refrigerante. Pode-se concluir que:*

(a) *$18ml$ de refrigerante irão transbordar.*

(b) *Ainda é possível colocar mais $16ml$ de refrigerante no recipiente, sem que ele transborde.*

(c) *o recipiente ficará completamente cheio, sem transbordar.*

(d) *Ainda é possível colocar $18ml$ de refrigerante no recipiente, sem que ele transborde.*

(e) *$16ml$ de refrigerante irão transbordar.*

Solução. O recipiente tem capacidade de

$$20 \cdot 10 \cdot 5 = 1000 \text{ cm}^3.$$

Por outro lado, o volume dos oito cubos de gelo é igual a

$$8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 27 = 216 \text{ cm}^3.$$

Como $1\text{ml} = 1 \text{ cm}^3$, concluímos que os 800ml de refrigerante despejados no recipiente ocuparão um volume de 800cm^3. Assim, somados aos 216cm^3 ocupados pelo volume dos oito cubos de gelo, obtemos

$$800 + 216 = 1016\text{cm}^3.$$

Uma vez que essa soma ultrapassa a capacidade do recipiente em

$$1016 - 1000 = 16\text{cm}^3 = 16\text{ml},$$

concluímos que 16ml de refrigerante irão transbordar. Assim, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas três sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. No exemplo 6, proponha aos alunos que encontrem a área da região sombreada diretamente, dividindo a região em polígonos cujas áreas eles saibam calcular.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema.