Material Teórico - Módulo Operações Básicas

Operações com números na forma decimal

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de abril de 2024

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Sabemos que uma mesma fração pode ser representada de várias maneiras. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$, ou seja, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$ são *formas equivalentes* de representar a mesma fração. A equivalência $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ é especialmente importante, porque o denominador da segunda fração é uma potência de 10. Qualquer fração cujo denominador seja uma potência de 10 é chamada **fração decimal**. Nesta seção, veremos que frações decimais são importantes porque podemos estender a elas a representação decimal de números naturais.

Iniciamos com um exemplo, recordando o que significa a representação decimal de um número natural. O número 3785 pode ser escrito como

$$3785 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1.$$

Para explicar como são as representações decimais das frações decimais, considere, por exemplo, a fração $\frac{378549}{100}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{378549}{100} &= \frac{300000 + 70000 + 8000 + 500 + 40 + 9}{100} \\
&= \frac{3 \cdot 100000 + 7 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1}{100} \\
&= \frac{3 \cdot 100000}{100} + \frac{7 \cdot 10000}{100} + \frac{8 \cdot 1000}{100} + \frac{5 \cdot 100}{100} + \frac{4 \cdot 10}{100} + \frac{9 \cdot 1}{100} \\
&= 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

Da última igualdade, segue que

$$\frac{378549}{100} = 3785 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{100}.$$

Utilizamos, então, a notação

$$3785{,}49$$

para representar a fração decimal $\frac{378549}{100}$, e dizemos que 3785,49 é a **representação decimal** de $\frac{378549}{100}$. Veja que a vírgula foi utilizada para separar os grupos de 1, 10, 100 e 1000 dos grupos de $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$.

Repetindo o raciocínio empregado no procedimento acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{68}{100} &= \frac{6\cdot 10+8}{100} = \frac{6\cdot 10}{100} + \frac{8}{100}\\ &= 6\cdot\frac{1}{10} + 8\cdot\frac{1}{10^2} = 0{,}68.\end{aligned}$$

Observe, agora, o que acontece com a fração decimal $\frac{349}{10000}$. Temos (verifique!)

$$\begin{aligned}\frac{349}{1000} &= 3\cdot\frac{1}{100} + 4\cdot\frac{1}{10^3} + 9\cdot\frac{1}{10^4}\\ &= 0\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{1}{100} + 4\cdot\frac{1}{10^3} + 9\cdot\frac{1}{10^4}\\ &= 0{,}0349.\end{aligned}$$

Podemos obter facilmente a representação decimal de qualquer fração equivalente a uma fração decimal. Como ilustração, veja os dois exemplos abaixo:

$$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5,$$

ou seja, 0,5 é a representação decimal da fração $\frac{1}{2}$. Da mesma forma,

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 25}{4\cdot 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

As representações decimais das frações decimais são chamadas **números decimais**. As frações $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ e $\frac{1}{10000}$ são chamadas **um décimo**, **um centésimo**, **um milésimo** e **um décimo de milésimo**, respectivamente.

Observação 1. *A vírgula, quando empregada na representação decimal das frações, é uma notação que significa o seguinte: o primeiro algarismo após a vírgula (da esquerda para a direita) representa a quantidade de décimos do número, o segundo algarismo após a vírgula (também da esquerda para a direita) representa a quantidade de centésimos, o terceiro a quantidade de milésimos e assim por diante.*

Olhando uma a uma as representações decimais:

$$\frac{378549}{100} = 3785{,}49; \quad \frac{68}{100} = 0{,}68;$$

$$\frac{349}{10000} = 0{,}0349; \quad \frac{5}{10} = 0{,}5;$$

notamos que, para escrever a representação decimal de uma fração decimal, basta imaginar que o numerador da fração decimal tem uma vírgula , após o último algarismo e, em seguida, deslocar essa vírgula tantas casas para a esquerda quantos sejam os zeros do denominador da fração; além disso, devemos completar com zeros à esquerda do primeiro algarismo, caso a quantidade de zeros do denominador da fração decimal seja maior que a quantidade de algarismos do numerador (como ocorre em $\frac{349}{10000}$*).*

Agora, faremos alguns exercícios para fixar as ideias apresentadas até aqui.

Exemplo 2. *Qual é a representação decimal da fração* $\frac{23}{100}$*?*

(a) 23. (b) 2,3. (c) 0,23. (d) 0,023.

Solução. Como estamos dividindo 23 por 100, que tem dois zeros, a vírgula imaginária após o 3 deve ser deslocada duas casas para a esquerda. Desse modo, a representação decimal de $\frac{23}{100}$ é 0,23, e a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 3. *Encontre as representações decimais das frações abaixo, utilizando frações equivalentes a elas e cujos denominadores sejam potências de* 10*.*

(a) $\frac{7}{2}$. (b) $\frac{3}{4}$. (c) $\frac{9}{25}$. (d) $\frac{13}{125}$.

Solução.
(a) Inicialmente, observe que qualquer potência de 10 é formada pelo produto de potências de 2 e 5 de mesmos expoentes.

Assim, para achar uma fração equivalente a $\frac{7}{2}$ e cujo denominador seja uma potência de 10, é suficiente multiplicar seus termos (numerador e denominador) por 5. Portanto,

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10} = 3{,}5.$$

(b) Em relação à fração $\frac{3}{4}$, como seu denominador $4 = 2^2$ tem dois fatores 2, devemos multiplicá-lo por $25 = 5^2$ para obter uma potência de 10 (no caso, $100 = 10^2$). Assim,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

(c) Do mesmo modo,

$$\frac{9}{25} = \frac{9 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{36}{100} = 0{,}36.$$

(d) Finalmente, como $125 = 5^3$ e $2^3 = 8$, temos

$$\frac{13}{125} = \frac{13 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{104}{1000} = 0{,}104.$$

$\square$

Exemplo 4. *Considere as representações decimais abaixo:*

(i) $\frac{3}{10} = 0{,}3$;

(ii) $\frac{4}{5} = 0{,}4$;

(iii) $\frac{1}{4} = 0{,}25$;

(iv) $\frac{49}{1000} = 0{,}049$.

Estão corretas:

(a) *apenas* (i) *e* (ii).

(b) *apenas* (i) *e* (iii).

(*c*) *apenas* (*ii*) *e* (*iii*).

(*d*) *apenas* (*i*), (*iii*) *e* (*iv*).

(*e*) (*i*), (*ii*), (*ii*) *e* (*iv*).

Solução.

- É claro que $\frac{3}{10} = 0{,}3$, pois, nesse caso, a vírgula deve ser deslocada uma casa para a esquerda. Assim, a igualdade em I está **correta**.

- Veja que
$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$
Logo, a igualdade apresentada em II está **incorreta**.

- Utilizando a mesma ideia empregada no item anterior, temos
$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$
Assim, a igualdade apresentada em III está **correta**.

- Finalmente, para encontrar a representação decimal da fração $\frac{49}{1000}$, devemos deslocar a vírgula após o 9 três casas para a esquerda, completando com um zero à esquerda do 4 para obter 0,049. Portanto, a igualdade em IV também está **correta**.

Desse modo, concluímos que a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Exemplo 5 (OBM). *Qual é o primeiro algarismo não nulo, após a vírgula, na representação decimal do número* $\frac{1}{5^{12}}$*?*

Solução. Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para resolver o exercício anterior, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração dada por $2^{12} = 4096$. Assim fazendo, obtemos

$$\frac{1}{5^{12}} = \frac{2^{12}}{5^{12} \cdot 2^{12}} = \frac{4096}{10^{12}} = 0{,}000000004096.$$

Portanto, o primeiro algarismo não nulo após a vírgula é igual a 4. □

Observação 6. *Suponha que o denominador de uma fração irredutível possua algum fator primo diferente de* 2 *e de* 5*. (Como é o caso de* $\frac{5}{12}$*, cujo denominador tem, além do fator primo* 2*, um fator primo* 3*). No próximo módulo, que trata dos números reais, veremos que ainda será possível obter uma representação decimal para a fração. No entanto, esta será dada por uma* ***dízima periódica****.*

Comparando números decimais

Em nossas vidas, desde muito cedo, aprendemos naturalmente a comparar números. Por exemplo, quando fazemos uma lista com os nomes e as idades dos membros de nossa família, a partir do mais jovem até o mais velho, estamos comparando as idades dessas pessoas. Veja que, quando dois desses membros viveram uma mesma quantidade de anos, teremos de verificar quem tem mais meses de vida a fim de saber quem é mais velho. Se eles também possuírem a mesma quantidade de meses de vida, então teremos de verificar quem tem mais dias, e assim por diante, passando a comparar horas, minutos, segundos e frações do segundo, caso seja necessário.

Para **comparar dois números decimais**, procedemos de maneira semelhante: inicialmente comparamos as partes inteiras dos números, e será maior o número que tiver a maior parte inteira. Mas, se as partes inteiras forem iguais, o maior dos números será o que tiver o maior algarismo na casa dos décimos. Permanecendo a igualdade, será maior o número que tiver o maior algarismo na casa dos centésimos. Se a igualdade ainda permanecer, o maior número será o que tiver o maior algarismo na casa dos milésimos, e assim por diante. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 7. *Qual dos números decimais é maior:* 45,956 *ou* 45,965*?*

Solução. Veja que os números possuem a mesma parte inteira (45) e a mesma quantidade de décimos (9). Entretanto, o algarismo dos centésimos do número 45,965 é igual a 6, enquanto o algarismo dos centésimos do número 45,956 é igual a 5. Portanto, o número 45,965 é maior que o número 45,956, o que denotamos em símbolos escrevendo

$$45{,}965 > 45{,}956.$$

□

Exemplo 8. *A tabela a seguir mostra as alturas (em metros) dos cinco atletas que compõem o time de basquete do terceiro ano do Colégio Matemágico.*

Aluno	**Altura**
André	1,89
Pedro	1,97
Fernando	1,93
Gabriel	2,03
Miguel	1,85

Construa uma tabela, similar a que foi apresentada acima, dos alunos com as suas respectivas alturas em ordem crescente.

Solução. Comparando as alturas conforme discutido anteriormente, notamos que a lista correta das alturas dos alunos em ordem crescente é: 1,85; 1,89; 1,93; 1,97; 2,03. Desse modo, organizando os alunos em uma tabela de acordo com as suas alturas em ordem crescente, obtemos □

Aluno	**Altura**
Miguel	1,85
André	1,89
Fernando	1,93
Pedro	1,97
Gabriel	2,03

Multiplicação e divisão por potências de 10

Nos primeiros anos da escola, aprendemos que, ao multiplicar um número natural por 10, o resultado é obtido acrescentando-se um zero à direita do número original. Por exemplo,

$$7298 \cdot 10 = 72980.$$

De forma análoga, quando **multiplicamos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a direita. Por exemplo,

$$895{,}32 \cdot 10 = 8953{,}2.$$

Por outro lado, quando **dividimos** um número decimal por 10, o resultado é obtido deslocando-se a vírgula *uma casa* para a esquerda. Por exemplo,

$$159{,}23 \div 10 = 15{,}923.$$

A justificativa para a validade de tais regras é dada pelas representações decimais dos números envolvidos. Por exemplo, temos:

$$895{,}32 = 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 2 \cdot \frac{1}{10^2},$$

de forma que

$$895{,}32 \cdot 10 = \left(8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10^2}\right) \cdot 10.$$

Então, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos:

$$895{,}32 \cdot 10 = 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10} = 8953{,}2.$$

Da mesma forma, como

$$159{,}23 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2},$$

temos

$$\begin{aligned}
&159{,}23 \div 10 = \\
&= \left(1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2}\right) \div 10 \\
&= \left(1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2}\right) \cdot \frac{1}{10} \\
&= 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 9 \cdot \frac{1}{10^1} + 2 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} \\
&= 15{,}923.
\end{aligned}$$

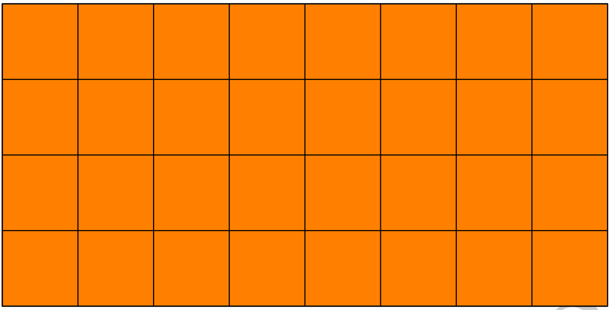
Exemplo 9. *Arthur tem um pedaço de fita amarela de* 16 *metros de comprimento, o qual deseja dividir em* 100 *pedaços de mesmo tamanho, para decorar caixas de presente que serão postas à venda no armarinho de sua mãe. Qual o comprimento de cada pedaço, admitindo-se que não haverá perda de material?*

Solução. Para calcular o comprimento de cada pedaço, devemos efetuar a divisão $16 \div 100$. Repetindo o raciocínio utilizado acima, devemos deslocar a vírgula, que se encontra à direita do 6, duas casas para a esquerda. Assim, obtemos

$$16 \div 100 = 0{,}16.$$

Logo, cada pedaço deve ter 0,16 metro, que é o mesmo que 16 centímetros. □

Exemplo 10. *Um muro é formado por* 10 *fileiras horizontais de tijolos. Na figura abaixo, podemos ver um pedaço desse muro. Sabendo que os tijolos têm a forma de quadrados de* 25 *centímetros de lado e que a primeira fileira horizontal é formada por exatamente* 100 *tijolos, calcule o comprimento e a altura do muro, em metros.*



Solução. Inicialmente, veja que 25 cm correspondem a 0,25 metro. Assim, para calcular a altura do muro, devemos calcular $0{,}25 \cdot 10$ e, para calcular o comprimento do muro, devemos calcular $0{,}25 \cdot 100$. Portanto, o muro tem $0{,}25 \cdot 10 = 2{,}5$ metros de altura e $0{,}25 \cdot 100 = 25$ metros de comprimento. $\square$

Algoritmo da divisão e representação decimal

Outra maneira de descobrir a forma decimal de uma fração equivalente a uma fração decimal é através do uso do algoritmo da divisão. Para entendermos essa afirmação, considere o seguinte

Exemplo 11. *A festa de aniversário de Joaquim será realizada no próximo sábado. Dona Sônia, mãe de Joaquim, comprou* 25 *pacotes de balas para distribuir com os convidados no dia da festa. Sabendo que todos os pacotes tiveram o mesmo preço e que Dona Sônia gastou um total de* 23 *reais com as balas, calcule o preço de cada pacote.*

Solução. É claro que cada pacote custou $\frac{23}{25}$ de 1 real; desse modo, precisamos encontrar a forma decimal da fração $\frac{23}{25}$. Inicialmente, observe que não podemos efetuar a divisão ordinária, pois $23 < 25$. Então, transformamos 23 em $230 \cdot \frac{1}{10}$ (230 décimos) e, em seguida, dividimos 230 por 25 utilizando o algoritmo da divisão, obtendo

$$230 = 25 \cdot 9 + 5.$$

Logo,

$$23 = 230 \cdot \frac{1}{10} = \frac{25 \cdot 9 + 5}{10} = 25 \cdot \frac{9}{10} + \frac{5}{10},$$

e pensamos em $\frac{9}{10} = 0{,}9$ como quociente parcial e $\frac{5}{10} = 0{,}5$ como resto parcial da divisão de 23 por 25.

Ainda restam 5 décimos para dividir por 25. Como não é possível efetuar a divisão ordinária de 5 por 25, observamos que $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$, ou seja, 5 décimos são iguais a 50 centésimos. Agora, podemos efetuar a divisão por 25: como

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{25 \cdot 2}{100} = 25 \cdot \frac{2}{100},$$

encontramos $\frac{2}{100} = 0{,}02$ como quociente e 0 como resto. Logo,

$$\frac{23}{25} = 0{,}9 + 0{,}02 = 0{,}92.$$

Portanto, cada pacote de balas custou R$ 0,92. □

Observação 12. *Para efetuarmos essa divisão na prática, executamos os passos descritos a seguir:*

1. *Começamos efetuando a divisão inteira de* 23 *por* 25*, cujo quociente é* 0 *e cujo resto é o próprio* 23*.*

2. *Em seguida, acrescentamos um* 0 *à direita do resto (que é* 23*) e, ao mesmo tempo, uma vírgula após o quociente* 0*.*

3. *Continuamos, efetuando a divisão inteira de* 230 *por* 25*, obtendo quociente* 9 *(que é escrito logo após a vírgula colocada no item anterior) e resto* 5*.*

4. *Novamente, como não podemos efetuar imediatamente uma divisão inteira de* 5 *por* 25*, acrescentamos um* 0 *à direita do resto* 5*.*

5. *Executamos a divisão inteira de* 50 *por* 25*, obtendo quociente* 2 *(que é escrito logo após o* 9 *obtido como quociente anterior) e resto* 0*.*

6. *Como chegamos a um resto igual a* 0*, o processo para, e obtivemos o* quociente decimal 0,92*.*

Esquematicamente, temos o seguinte diagrama que resume os passos acima:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & & & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 3 & 0 & & 0, & 9 & 2 \\ & & 5 & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Vejamos mais um exemplo

Exemplo 13. *Carlos fez um total de 7 litros de suco de caju e distribuiu tudo em 8 garrafas idênticas, as quais ficaram completamente cheias. Qual é a capacidade de cada garrafa?*

Solução. A capacidade de cada garrafa é igual a $\frac{7}{8}$ de 1 litro. Efetuando a divisão, obtemos

$$\begin{array}{cccc|cccc} 7 & & & & 8 & & & \\ \hline 7 & 0 & & & 0, & 8 & 7 & 5 \\ & 6 & 0 & & & & & \\ & & 4 & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & & \end{array}$$

Portanto, a capacidade de cada garrafa é 0,875 litro ou, o que é o mesmo, 875 mililitros. □

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas ou três sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. É fundamental que os alunos entendam a representação decimal de um número racional, incluindo o porquê da utilização da vírgula, pois isso é um pré-requisito para enterder os algoritmos das operações básicas com números na forma decimal.