Material Teórico - Módulo de Frações, O Primeiro Contato

Exercícios sobre Frações - Parte 2

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

17 de julho de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, seguimos apresentando problemas que envolvem operações aritméticas com frações. Todos os problemas apresentados aqui foram propostos em Olimpíadas de Matemática.

Exemplo 1 (OBMEP - adaptado). *Pedrinho colocou* 1 *copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou* 4 *copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é a fração de suco na jarra?*

(a) $\frac{1}{20}$.

(b) $\frac{1}{10}$.

(c) $\frac{3}{20}$.

(d) $\frac{1}{4}$.

(e) $\frac{1}{5}$.

Solução. Inicialmente, Pedrinho colocou 1 copo de suco na jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água, logo, o volume total de líquido contido na jarra neste momento era $1 + 4 = 5$ litros. Assim, para dobrar esse volume, Pedrinho teve de colocar mais 5 copos de água, totalizando um volume de 10 copos, sendo 1 de suco e 9 de água. Portanto, a fração de suco na jarra é $\frac{1}{10}$ e a alternativa correta é a da letra (b). □

Exemplo 2 (OBMEP). *Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche* $3/5$ *da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche* $5/8$ *da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?*

(a) *Ela ficará preenchida em* $7/8$ *de sua capacidade.*

(b) *Ela ficará preenchida em* $8/13$ *de sua capacidade.*

(c) *Ela ficará preenchida em* $5/8$ *de sua capacidade.*

(d) *Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.*

(e) *Ela vai transbordar.*

Solução. Veja que a caneca pequena enche $\frac{3}{5}$ da média que, por sua vez, enche $\frac{5}{8}$ da grande. Portanto, a caneca pequena enche $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ da caneca grande. Assim, quando os conteúdos das canecas pequena e média forem despejados na caneca grande, a fração da caneca grande ocupada será

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8}.$$

Portanto, a caneca grande ficará totalmente cheia, sem transbordar, e a alternativa correta é a da letra (d). □

Exemplo 3 (OBM). *A idade atual de Pedro é igual a* $\frac{3}{5}$ *da idade atual de Fernando. Exatamente* 10 *anos atrás, a soma das idades deles era* 60*. Qual será a idade de Pedro daqui a exatamente* 13 *anos?*

(a) 53.

(b) 63.

(c) 47.

(d) 43.

(e) 50.

Solução. Note que, se há 10 anos a soma das idades de Pedro e Fernando era 60 anos, atualmente essa soma é $60 + 20 = 80$ anos, pois devem ser somados 10 anos à idade de cada um. Como a idade atual de Pedro é igual a $\frac{3}{5}$ da idade atual de Fernando, a soma das idades dos dois corresponde a

$$\frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

da idade de Fernando. Portanto, $\frac{8}{5}$ da idade atual de Fernando correspondem a 80 anos, de modo que $\frac{1}{5}$ da idade atual de Fernando corresponde a $80 \div 8 = 10$ anos. Assim, concluímos que, atualmente, Pedro possui $3 \cdot 10 = 30$ anos e, daqui a 13 anos, ele terá $30 + 13 = 43$ anos. Portanto, a alternativa correta é a da letra (d). $\square$

Exemplo 4. *Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Em anos, a soma das idades dos três vale:*

(a) 53.

(b) 63.

(c) 58.

(d) 60.

(e) 34.

Solução. Perceba que a idade de Rafael é igual a $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto que, por sua vez, é igual a $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Assim, a idade de Rafael é igual a

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

da idade de Reinaldo.

Como Rafael é 2 anos mais jovem que Reinaldo, $\frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ da idade de Reinaldo — que é a diferença entre as frações que representam as idades dos dois — corresponde a 2 anos. Logo, $\frac{9}{9} = 1$ da idade de Reinaldo corresponde a $9 \cdot 2 = 18$ anos.

Assim a idade de Rafael é $18 - 2 = 16$ anos e a idade de Roberto é $\frac{4}{3} \cdot 18 = 24$ anos, de forma que a soma das idades dos três vale

$$18 + 16 + 24 = 58 \text{ anos}.$$

A alternativa correta é a da letra (c). $\square$

Exemplo 5 (Olimpíada Chilena). *Que frações devem ser retiradas da soma*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

para que a soma valha 1*?*

Solução. Veja que a soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$$

é igual a

$$\frac{60+40+30+20+15+12+10}{120}=\frac{187}{120}. \qquad (1)$$

Desse modo, para que a soma seja igual a $1=\frac{120}{120}$, as frações retiradas devem ter soma igual a

$$\frac{187}{120}-\frac{120}{120}=\frac{67}{120}.$$

Em termos das parcelas do numerador do primeiro membro de (1), isso é o mesmo que escolher algumas delas cuja soma valha 67. Como todas terminam em zero, exceto 15 e 12 — que somam 27 —, essas duas parcelas — que correspondem às frações $\frac{1}{8}=\frac{15}{120}$ e $\frac{1}{10}=\frac{12}{120}$ — devem ser escolhidas. Agora, ainda devem ser escolhidas parcelas cuja soma seja igual a $67-27=40$. Podemos fazer isso de dois modos:

- retirando somente $\frac{1}{3}=\frac{40}{120}$ ou
- retirando as frações $\frac{1}{4}=\frac{30}{120}$ e $\frac{1}{12}=\frac{10}{120}$.

Portanto, devemos retirar as frações $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{3}$ ou, então, as frações $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{12}$. □

Exemplo 6 (Olimpíada Portuguesa). *Em um saco há pedras pretas e brancas. Há* 20 *pedras brancas e* $\frac{9}{10}$ *das pedras do saco são pretas. Que fração das pedras pretas devemos retirar para que* $\frac{4}{5}$ *das pedras que ficarem no saco sejam pretas?*

1ª Solução. Como $\frac{9}{10}$ das pedras no saco são pretas, temos que $\frac{1}{10}$ das pedras no saco são brancas, fração que corresponde a 20 pedras. Assim, há $20 \cdot 9 = 180$ pedras pretas no saco.

Para que $\frac{4}{5}$ das pedras no saco sejam pretas, a fração de pedras brancas deve passar a ser $\frac{1}{5}$. Como a quantidade de 20 pedras brancas deve ser mantida, a quantidade de pedras pretas no saco deve passar a ser $20 \cdot 4 = 80$. Desse modo, devem ser retiradas $180 - 80 = 100$ pedras pretas, ou seja, a fração das pedras pretas que deve ser retirada é

$$\frac{100}{180} = \frac{5}{9}.$$

2ª Solução Inicialmente, a quantidade de pedras pretas é igual a nove vezes a quantidade de pedras brancas, pois $\frac{9}{10}$ das pedras são pretas e $\frac{1}{10}$ das pedras são brancas. Sem alterar a quantidade de pedras brancas, pretendemos que a quantidade de pedras pretas passe a ser quatro vezes a quantidade de pedras brancas, já que, ao final, $\frac{4}{5}$ das pedras devem ser pretas e $\frac{1}{5}$ das pedras devem ser brancas. Logo, a fração de pedras pretas que deve ser retirada para que isso ocorra é

$$\frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

□

Exemplo 7 (Olimpíada Portuguesa)**.** *Uma prova de atletismo é constituída por um número inteiro de voltas em uma pista circular. Felícia percorreu $\frac{2}{9}$ do percurso total, parou para beber um pouco de água e correu mais $\frac{5}{6}$ de uma volta. Sabendo que, nesse ponto, ainda faltava Felícia percorrer $\frac{3}{4}$ do percurso, quantas voltas teve essa prova?*

(*a*) 18.

(*b*) 27.

(*c*) 30.

(*d*) 35.

(e) 36.

Solução. Observe que, juntando $\frac{2}{9}$ do percurso total a $\frac{5}{6}$ de uma volta, obtém-se $\frac{1}{4}$ do percurso, já que, depois de percorridos esses trechos, ainda faltava Felícia percorrer $\frac{3}{4}$ do percurso. Desse modo, $\frac{5}{6}$ de uma volta correspondem a

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

do percurso total. Portanto, $\frac{1}{6}$ de uma volta corresponde a

$$\frac{1}{36} \div 5 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{180}$$

do percurso total. Assim, concluímos que $180 \cdot \frac{1}{6} = 30$ voltas correspondem a $\frac{180}{180}$ do percurso total. A alternativa correta é a da letra (c). $\square$

Exemplo 8 (Olimpíada Cearense). *Tem-se seis jarras. Inicialmente, cinco delas contêm* 2 *litros de água e uma delas contém* 1 *litro de água. Um movimento permitido consiste em escolher duas das jarras e dividir o total de água nelas contida em duas porções iguais. É possível que, após um número finito de movimentos, todas as seis jarras tenham a mesma quantidade de água? Justifique sua resposta.*

(Nota: assuma que a capacidade de cada uma das seis jarras seja maior que 2 litros e que nenhum líquido seja desperdiçado ao se realizar uma operação permitida.)

Solução. Inicialmente, cinco jarras contêm 2 litros de água cada uma e a sexta jarra contém 1 litro de água, logo, o total de água nas seis jarras é $5 \cdot 2 + 1 = 11$ litros.

Suponhamos que seja possível deixar as seis jarras com a mesma quantidade de água após alguns movimentos. Como não há desperdício de líquido ao se realizar uma movimento permitido, a quantidade de água em cada jarra, ao final, seria $\frac{11}{6}$. Observe que $\frac{11}{6}$ é uma fração irredutível e que o denominador 6 é múltiplo de 3.

Note agora que, no início, as quantidades de água em cinco das seis jarras vale $2 = \frac{2}{2^0}$ litros e, na jarra restante, vale $1 = \frac{1}{2^0}$ litro.

Assuma que, após uma certa quantidade de movimentos, as quantidades de água nas jarras, quando expressas por frações irredutíveis, tenham denominadores iguais a potências de 2.

Escolha duas jarras para executar o próximo movimento e escreva as quantidades de água nelas contidas como

$$\frac{a}{2^m} \quad \text{e} \quad \frac{b}{2^n},$$

em que a, b, m e n são inteiros não negativos, com a e b ímpares; suponha, ainda (e sem perda de generalidade), que $m \geq n$.

O movimento seguinte consiste em dividir o total de água contida nessas duas jarras em duas porções iguais. Então, a quantidade de água nas duas jarras, após esse movimento, será igual a

$$\frac{\frac{a}{2^m} + \frac{b}{2^n}}{2} = \frac{\frac{a}{2^m} + \frac{b \cdot 2^{m-n}}{2^m}}{2} = \frac{a + b \cdot 2^{m-n}}{2^{m+1}}.$$

Ao reduzir essa última fração a uma fração irredutível, cancelaremos no máximo alguns fatores 2 do denominador; portanto, obteremos uma fração irredutível com denominador também igual a uma potência de 2. Dessa forma, após o próximo movimento, as quantidades de água nas jarras, quando expressas por frações irredutíveis, novamente terão denominadores iguais a potências de 2.

Concluímos, portanto, que é impossível que, após uma certa quantidade de movimentos, obtenhamos $\frac{11}{6}$ litros de água em uma jarra, quanto mais em todas. $\square$

Sugestões ao Professor

Sugerimos que sejam utilizadas quatro sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicarem as soluções.

Ressaltamos a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios próprios. Por outro lado, ainda que eles não as encontrem, ou apresentem uma solução errada, esse processo é fundamental para a aprendizagem.

Depois de deixar os alunos tertarem resolver as questões por algum tempo, caso eles não obtenham êxito, é recomendável que o professor, aos poucos, dê dicas das soluções, antes de entregar as soluções completas. Este procedimento ajuda na sedimentação das ideias que os problemas carregam.

O último problema utiliza, no contexto de frações, uma ideia simples, mas muito importante: a de se procurar um *invariante* (isto é, algo que *não varia* — no caso, o fato de os denominadores das representações irredutíveis das quantidades de água nas jarras serem potências de 2) para obter algum controle sobre o resultado de uma operação aparentemente aleatória. Para saber mais sobre essa ideia, veja a seção 4.4 da referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. Antonio Caminha M. Neto. *Tópicos de Matemática Elementar, volume 4: Combinatória*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2024.