Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Operações com Números Naturais - Parte 1

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

30 de novembro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos exercícios variados, os quais envolvem conteúdos como operações aritméticas, fatoração e divisibilidade de números naturais, além porcentagem.

Exemplo 1 (OBM). *Dentre os números naturais de* 1 *até* n*, pelo menos* 11 *são divisíveis por* 5 *e no máximo* 9 *são divisíveis por* 6*. No máximo, quantos desses números são divisíveis por* 7*?*

(a) 4.

(b) 5.

(c) 6.

(d) 7.

(e) 8.

Solução. Veja que, quando se exclui o zero, os 11 primeiros múltiplos de 5 são

$$1 \cdot 5 = 5, 2 \cdot 5 = 10, \ldots, 11 \cdot 5 = 55.$$

Uma vez que, dentre os números naturais de 1 até n, pelos menos 11 são divisíveis por 5, temos que n deve ser maior do que ou igual a 55.

Por outro lado, ainda excluindo-se o zero, os 9 primeiros múltiplos de 6 são

$$1 \cdot 6 = 6, 2 \cdot 6 = 12, \ldots, 9 \cdot 6 = 54.$$

Assim, como há no máximo 9 múltiplos de 6 de 1 até n, temos que n deve ser menor do que 60, pois se fosse maior do que ou igual a 60, haveria pelo menos 10 múltiplos de 6 dentre os números 1 até n.

Desse modo, n deve ser um número maior do que ou igual a 55 e menor do que 60. Agora, veja que

$$1 \cdot 7 = 7, 2 \cdot 7 = 14, \ldots, 8 \cdot 7 = 56.$$

Daí, caso $n = 55$, temos apenas 7 múltiplos de 7 dentre os números de 1 até n, pois o 56 não seria contado. Caso n seja igual a 56, 57, 58 ou 59, temos um total de 8 múltiplos de 7 dentre os números de 1 até n.

Portanto, sendo n menor ou igual a 60, temos que o número máximo de múltiplos de 7 dentre os números naturais de 1 até n é igual a 8. Logo, a alternativa correta é a letra **(e)**. $\square$

Exemplo 2. *Meu pai possui um cofre, onde guarda somente notas de* R$ 100,00 *e de* R$ 50,00*. Certo dia, ele contou quanto dinheiro havia no cofre, chegando a um total de* R$ 20000,00*. Se a quantidade de notas de* R$ 50,00 *guardadas no cofre até aquele dia era o dobro da quantidade de notas de* R$ 100,00*, qual o total de notas contidas no cofre?*

(*a*) 240 *notas.*

(*b*) 260 *notas.*

(*c*) 280 *notas.*

(*d*) 300 *notas.*

(*e*) 320 *notas.*

Solução. Com o auxílio da tabela abaixo, notamos que, aumentando o total de notas de 3 em 3 (duas de 50 reais e uma de 100 reais), o valor total em reais aumenta de 200 em 200 reais.

notas de 50,00	notas de 100,00	total
2	1	$2 \cdot 50 + 1 \cdot 100 = 200$
4	2	$4 \cdot 50 + 2 \cdot 100 = 400$
6	3	$6 \cdot 50 + 3 \cdot 100 = 600$
8	4	$8 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 800$

Desse modo, para saber a quantidade total de notas, basta dividir a quantia total em dinheiro que havia no cofre por 200 e, em seguida, multiplicar o valor encontrado por 3, porque cada grupo de 200 reais é formado por três notas. Assim, obtemos um total de

$$(20000 \div 200) \cdot 3 = 100 \cdot 3 = \mathbf{300\ notas}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**. $\square$

Exemplo 3 (OBM). *Rita escreve a sequência formada por números de três algarismos não nulos a seguir:*

$$123, 234, 345, \ldots, 789, 891, 912, 123, 234, \ldots.$$

Qual é o $2013^{\underline{o}}$ *termo dessa sequência?*

(a) 345.

(b) 456.

(c) 567.

(d) 678.

(e) 789.

Solução. Perceba que os 9 primeiros termos da sequência são

$$123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 891, 912.$$

Por outro lado, a partir daí os números se repetem, sempre na mesma ordem.

Desse modo:

- os termos que ocupam as posicões 1, $1 + 1 \cdot 9 = 10$, $1 + 2 \cdot 9 = 19$, $1 + 3 \cdot 9 = 28$, ... são todos iguais a 123;

- os termos que ocupam as posicões 2, $2 + 1 \cdot 9 = 11$, $2 + 2 \cdot 9 = 20$, $2 + 3 \cdot 9 = 29$, ... são todos iguais a 234;

- os termos que ocupam as posicões 3, $3 + 1 \cdot 9 = 12$, $3 + 2 \cdot 9 = 21$, $3 + 3 \cdot 9 = 30$, ... são todos iguais a 345;

- etc.

Assim, para determinar o $2013^{\underline{o}}$ termo da sequência, basta dividir 2013 por 9 e observar o resto. A tabela a seguir faz uma correspondência entre os possíveis restos encontrados na divisão da posição de um determinado termo por 9:

resto	termo correspondente
1	123
2	234
3	345
4	456
5	567
6	678
7	789
8	891
0	912

Por fim, uma vez que

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,1\,3 & 9 \\ \cline{2-2} 2\,1 & 2\,2\,3 \\ 3\,3 & \\ 6 & \end{array}$$

obtemos que o $2013^{\underline{o}}$ termo da sequência é igual a 678. Assim, a alternativa correta é a letra **(d)**. $\square$

Exemplo 4. *Na adição de termos iguais*

$$2013^{2013} + 2013^{2013} + 2013^{2013} + \ldots + 2013^{2013} = 2013^{2014},$$

escrita de forma simplificada, foram escritos muitos sinais de adição $(+)$. *Quantos foram escritos?*

(a) 1006.

(b) 2009.

(c) 2012.

(d) 2014.

(e) 4026.

Solução. Iniciamos observando que

$$\begin{aligned} 2013^{2014} = 2013^{1+2013} &= 2013^1 \cdot 2013^{2013} \\ &= 2013 \cdot 2013^{2013}. \end{aligned}$$

Assim, a adição

$$2013^{2013} + 2013^{2013} + 2013^{2013} + \ldots + 2013^{2013} = 2013^{2014}$$

possui 2013 parcelas.

Agora, observe que em uma adição de duas parcelas é utilizado apenas um sinal +; em uma adição de três parcelas são utilizados dois sinais +; em uma adição de quatro parcelas são utilizados 3 sinais +; e assim por diante, sempre utilizando um sinal + a menos do que a quantidade de parcelas.

Portanto, na adição do enunciado, que possui 2013 parcelas, são utilizados 2012 sinais +. □

Exemplo 5. Qual é o algarismo das unidades do numeral que representa a protência 2^{2020} na base decimal.

(a) 0.

(b) 2.

(c) 4.

(d) 6.

(e) 8.

Solução. Observe a tabela a seguir:

$2^1 = \mathbf{2}$	$2^2 = \mathbf{4}$	$2^3 = \mathbf{8}$	$2^4 = 1\mathbf{6}$
$2^5 = 3\mathbf{2}$	$2^6 = 6\mathbf{4}$	$2^7 = 12\mathbf{8}$	$2^8 = 25\mathbf{6}$
$2^9 = 51\mathbf{2}$	$2^{10} = 102\mathbf{4}$	$2^{11} = 204\mathbf{8}$	$2^{12} = 409\mathbf{6}$

Ela traz os termos iniciais da sequência das potências de 2, com destaque para os algarismos das unidades, destacados em vermelho. Observando-a, notamos que os algarismos das unidades das potências de 2 se repetem a partir da potência 2^5, sempre na mesma ordem, com período igual a 4.

Desse modo, para saber o algarismo das unidades de uma potência de 2, basta dividir o expoente por 4 e observar o resto. Podemos resumir essa discussão como segue:

- Resto 1 $\Longrightarrow$ algarismo das unidades igual a **2**.
- Resto 2 $\Longrightarrow$ algarismo das unidades igual a **4**.
- Resto 3 $\Longrightarrow$ algarismo das unidades igual a **8**.
- Resto 0 $\Longrightarrow$ algarismo das unidades igual a **6**.

Na divisão de 2020 por 4, o resto é igual a 0.

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,0 & 4 \\ \cline{2-2} 0\,2\,0 & 5\,0\,5 \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, o algarismo das unidades de 2^{2020} é o mesmo algarismo das unidades de 2^4 é igual a **6**, ou seja, a alternativa correta é a letra **(d)**. $\square$

Exemplo 6. *Se Joana comprar hoje um computador de* 2000 *reais, ela conseguirá um desconto de* 5%*. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de* 5%*, mas o preço do computador terá aumentado em* 5%*. Se ela esperar, o que acontecerá?*

(a) *Nada, pois pagará a mesma quantia.*

(b) *Ela perderá* 100 *reais.*

(c) *Ela ganhará* 105 *reais.*

(d) *Ela perderá* 95 *reais.*

(e) *Ela perderá* 105 *reais*

Solução. Se Joana comprar o computador hoje, ela conseguirá um desconto de $5\% = 0{,}05$. Logo, Joana pagará

$$\begin{aligned}(1 - 0{,}05) \cdot 2000 &= 0{,}95 \cdot 2000 \\ &= 1900 \text{ reais.}\end{aligned}$$

No dia seguinte, o preço do computador será

$$\begin{aligned}(1 + 0{,}05) \cdot 2000 &= 1{,}05 \cdot 2000 \\ &= 2100 \text{ reais,}\end{aligned}$$

pois terá aumentado em $5\% = 0{,}05$. Logo, aplicando o desconto de $5\% = 0{,}05$ sobre o valor de 2100 reais, obtemos

$$\begin{aligned}(1 - 0{,}05) \cdot 2100 &= 0{,}95 \cdot 2100 \\ &= 1995 \text{ reais.}\end{aligned}$$

Portanto, comparando os preços de venda do computador nos dois dias, percebemos que Joana pagará $1995 - 1900 = 95$ reais a mais se deixar a compra para o dia seguinte. Logo, a alternativa correta é a letra **(d)**. □

Observação 7. *Um erro muito comum que é cometido nas soluções de problemas como o que foi proposto no Exemplo 6 é o seguinte: para saber o preço a ser pago pelo computador no dia seguinte, o acréscimo e o desconto de 5% são calculados sobre o mesmo valor. Assim, esse preço seria igual a 2000 reais, em vez dos 1995 reais que foram encontrados.*

Exemplo 8. *O engenheiro João recebeu, em fevereiro de 2020, um aumento de 25% sobre o salário de doze mil reais que recebia da construtura na qual é empregado. No mês seguinte, por ter sido promovido de cargo, recebeu um outro aumento de 25% sobre o salário que recebia naquela data. Após esses dois aumentos, o salário de João passou a ser de:*

(*a*) R$ 18000,00.

(*b*) R$ 18306,00.

(*c*) R$ 18750,00.

(d) R\$ 18930,00.

(e) R\$ 18950,00.

Solução. Uma vez que $25\% = 0{,}25$, após o primeiro aumento, o salário de João passou a ser de

$$(1 + 0{,}25) \cdot 12000 = 15000.$$

O segundo aumento de 25% não deve ser calculado sobre 12000 reais, mas sobre o salário de fevereiro, o qual já está aumentado em 25%. Desse modo, o salário após os dois aumentos será:

$$\begin{aligned}(1 + 0{,}25) \cdot 15000 &= 1{,}25 \cdot 15000\\ &= 18750 \text{ reais.}\end{aligned}$$

$\square$

Observação 9. *Também neste exemplo há um erro corriqueiro, que consiste em somar os dois percentuais de* 25% *e calcular um aumento de* 50% *sobre o salário de janeiro. Assim, o valor do salário após os aumentos passaria a ser de*

$$(1 + 0{,}50) \cdot 12000 = 1{,}5 \cdot 12000 = 18000 \textit{ reais},$$

o que não é correto.

Exemplo 10. *Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de* 1 *a* 2013*, sendo um número para cada quadrado. Ela começa do canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna de cima para baixo e continua da mesma forma, sempre preenchendo de cima para baixo a terceira coluna, a quarta, etc. até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número* 50 *está na segunda coluna, em qual coluna estará escrito o número* 1000*?*

(a) 23.

(b) 31.

(c) 33.

(d) 39.

(e) 61.

Solução. Como Joana preenche completamente o quadriculado com os números de 1 a 2013, o produto do número de linhas pelo número de colunas é igual a 2013. Além disso, o número de linhas é menor que 50 e maior que 25, pois caso contrário o número 50 não estaria na segunda coluna.

Agora, veja que 2013 é múltiplo de 3 (pois $2+0+1+3=6$, que é um múltiplo de 3) e de 11 (pois $2-0+1-3=0$, que é um múltiplo de 11). Dividindo 2013 primeiro por 3 e depois por 11, obtemos $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

Como o número de linhas divide 2013 e é maior que 24 e menor que 50, a única alternativa é o número de linhas ser igual a $3 \cdot 11 = 33$ e o número de colunas ser igual a 61.

Por fim, para sabermos a culuna do número 1000, basta efetuar a divisão de 1000 por 33:

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,0\,0 & 3\,3 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 3\,0 \end{array}$$

Assim, até a coluna 30, estão escritos todos os números de 1 até $30 \cdot 33 = 990$. Portanto, 1000 está na coluna 31. Daí, a alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Exemplo 11 (OBMEP). *Três amigos fizeram uma aposta tentando adivinhar quantas sementes havia dentro de uma abóbora. Os palpites foram os seguintes:* 234, 260 *e* 274. *Quando abriram a abóbora e contaram as sementes, viram que um dos palpites estava errado por* 17, *outro por* 31 *e o outro por* 9, *para mais ou para menos. Na contagem das sementes, elas foram agrupadas em vários montinhos, cada um deles com* 10, *e um último montinho com menos de* 10 *sementes. Quantas sementes havia nesse último montinho?*

(a) 1.

(b) 3.

(*c*) 5.

(*d*) 7.

(*e*) 9.

Solução. Como um dos amigos apostou em 234 e cometeu um erro de 17, 31 ou 9, por falta ou por excesso, a quantidade correta de sementes deve ser um dos números destacados em vermelho, abaixo:

$234 + 17 = 251$	$234 - 17 = 217$
$234 + 31 = 265$	$234 - 31 = 203$
$234 + 9 = \mathbf{243}$	$234 - 9 = 225$

Repetindo o raciocínio, uma vez o segundo amigo palpitou 260 e cometeu um erro de 17, 31 ou 9, por falta ou por excesso, a quantidade correta de sementes também deve fazer parte da lista de números destacados em vermelho, a seguir:

$260 + 17 = 277$	$260 - 17 = \mathbf{243}$
$260 + 31 = 291$	$260 - 31 = 229$
$260 + 9 = 269$	$260 - 9 = 251$

Finalmente, como o terceiro amigo apostou em 274 e também errou por 17, 31 ou 9, por falta ou por excesso, a quantidade correta de sementes deve ser um dos seguintes números destacados em vermelho:

$274 + 17 = 291$	$274 - 17 = 257$
$274 + 31 = 305$	$274 - 31 = \mathbf{243}$
$274 + 9 = 283$	$274 - 9 = 265$

Veja que o único número que aparece nas três listas é o 243. Sendo assim, **243** é a quantidade correta de sementes. Observe, ainda, que o amigo que apostou em 234 cometeu um erro de 9 (por falta), o que apostou em 260 cometeu um erro de 17 (por excesso) e o que apostou em 274 cometeu um erro de 31 (também por excesso).

Para concluir, veja que a quantidade de sementes no último montinho é igual ao resto obtido na divisão de 243 por 10, ou seja, é igual a 3. Portanto, a alternativa correta é a letra **(b)**. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas três sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria. Em particular, não deixe de dar um tempo para que os alunos tentem resolver o Exemplo 6. É provável que alguns cometam o erro que foi citado na observação subsequente ao exemplo, mas é importante que tentem resolvê-lo antes da solução correta ser apresentada. A mesma recomendação vale para o Exemplo 8.

É recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados, antes de resolver cada problema.