Material Teórico - Módulo de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Semelhança entre triângulos

Nono ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Jocelino Sato
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

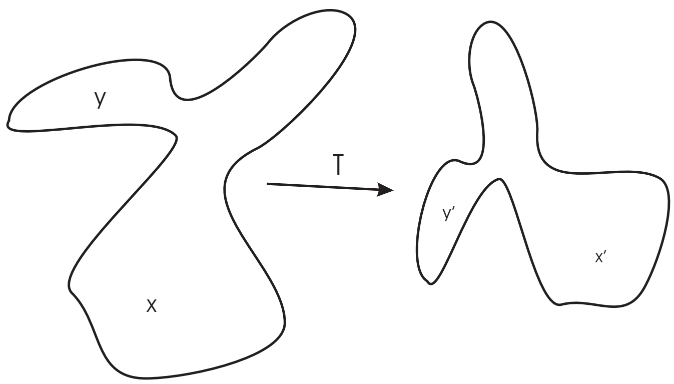
Portal da Matemática
OBMEP

1 Figuras Semelhantes

O principal objetivo desse material é estabelecer o conceito de semelhança. Esse conceito é fundamental para o estudo das relações métricas num triângulo retângulo, as quais, por sua vez, possuem várias aplicações em vários campos das ciências.

Genericamente, dizemos que duas figuras planas F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunivoca T entre os pontos de F e os pontos de F', chamada **transformação de semelhança**, que preserva a *forma* das figuras. Equivalentemente, se X, Y são pontos quaisquer de F e se $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ são seus correspondentes em $F' = T(F)$ (denominados **pontos homólogos**), então

$$X'Y' = r \cdot XY. \tag{1}$$



Notação: escrevemos $F \sim F'$ para denotar que F e F' siguras semelhantes.

Observação: *Toda transformação que satisfaz a igualdade* (1) *transforma pontos colineares em pontos colineares, preserva medida de ângulos e paralelismo de retas. Assim, a noção de semelhança corresponde à idéia natural de* "**mudança de escala**"*, isto é,* **ampliação** *(quando a razão r satisfaz $r > 1$) ou* **redução** *(quando a razão r satisfaz $0 < r < 1$) de uma figura, alterando seu tamanho sem modificar suas proporções.*

Se $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$ são dois polígonos de n lados semelhantes (com o vértice A_i homólogo aos vértice B_i), então a correspondência

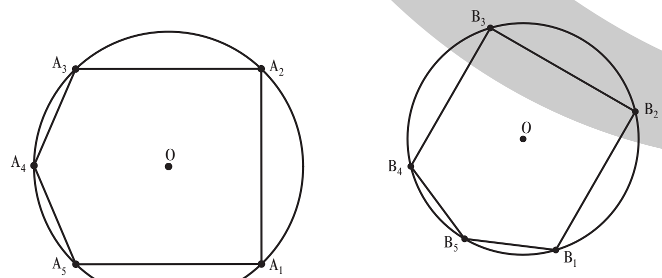
$$A_1 \leftrightarrow B_1,\ A_2 \leftrightarrow B_2, \ldots, A_n \leftrightarrow B_n$$

entre os vértices dos polígonos de modo que os pares de lados correspondentes (ditos **lados homólogos**) são proporcionais entre si e os pares de ângulos correspondentes (ditos **ângulos homólogos**) são congruentes entre si. De fato, para polígonos essas duas condições são suficientes para garantir que existe uma transformação de semelhança entre os dois polígonos. Vale observar que, na nomenclatura utilizada, *polígono* $A_1A_2...A_n$, adotamos implicitamente uma *ordenação horária* ou *anti-horária* para os vértices do polígono. Além disso, um mesmo polígono pode ser representado por qualquer rotação de seus vértices; por exemplo, fixados os pontos não colineares A, B e C, temos que $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$ (citações "anti-horárias") e $\triangle ACB$, $\triangle CBA$, $\triangle BAC$ (citações "horárias") representam o mesmo triângulo.

Por exemplo, em relação aos polígonos convexos da figura a seguir, a correspondência

$$A_1 \leftrightarrow B_1,\ A_2 \leftrightarrow B_2, \ldots, A_5 \leftrightarrow B_5$$

(ou, resumidamente, $A_1A_2...A_5 \leftrightarrow B_1B_2...B_5$) é uma semelhança se, e somente se,



$$\begin{cases} A_4\widehat{A_5}A_1 = B_4\widehat{B_5}B_1, \quad A_5\widehat{A_1}A_2 = B_5\widehat{B_1}B_2, \\ A_1\widehat{A_2}A_3 = B_1\widehat{B_2}B_3, \quad A_2\widehat{A_3}A_4 = B_2\widehat{B_3}B_4, \\ A_3\widehat{A_4}A_5 = B_3\widehat{B_4}B_5, \\ \qquad\qquad \text{e} \\ \frac{A_5A_1}{B_5B_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5} = r \end{cases}.$$

Sendo esse o caso, escrevemos

$$A_1A_2...A_5 \sim B_1B_2...B_5.$$

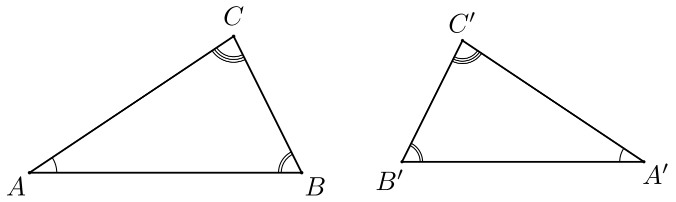
Eum par de polígonos semelhantes, o quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de **razão de semelhança**. Assim, nas notações da discussão acima, a razão de semelhança é r. Quando a razão de semelhança é $r = 1$ temos uma *congruência* entre os polígonos.

Não é difícil mostrar que a semelhança entre dois polígonos $A_1A_2\ldots A_n$ e $B_1B_2\ldots B_n$, com A_i e B_i homólogos para $1 \leq i \leq n$, é equivalente à semelhança entre os triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$, para $1 \leq i < j < k \leq n$. Assim, podemos nos limitar ao estudo de semelhança entre triângulos.

2 Semelhanças entre triângulos

Nesta seção, estudamos conjuntos mínimos de condições sobre dois triângulos, de forma tal que garantam a semelhança dos mesmos. Esse conjuntos de condições são os análogos, para semelhanças, dos casos de congruência de triângulos e, por essa razão, são denominados **casos** (ou **critérios**) **de semelhança de triângulos**.

Critério AAA de semelhança: *se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os ângulos correspondentes sejam congruentes, então a correspondência é uma semelhança. Em símbolos (veja a figura a seguir), dados os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$, *se* $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$, $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$ *e* $B\widehat{C}A = B'\widehat{C'}A'$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Prova. Sejam G e H pontos em $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AG = A'B'$ e $AH = A'C'$. Então, o caso de congruência LAL garante que $\triangle AGH \equiv \triangle A'B'C'$. Logo,

$$A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C' = A\widehat{G}H \text{ e } B\widehat{C}A = B'\widehat{C'}A' = G\widehat{H}A.$$

Assim, ou $\overleftrightarrow{GH} = \overleftrightarrow{BC}$ (e, neste caso, $B = G$ e $C = H$) ou, pelo Teorema dos Ângulos Alternos-Internos, $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. No primeiro caso, temos $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$, de forma que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. No segundo caso, o Teorema de Tales diz que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Por fim, uma construção análoga permite demonstrar que $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, o que conclui a prova da semelhança dos triângulos em questão. □

Usando que na Geometria Euclidiana Plana a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a $180°$, obtemos a forma usual a seguir do caso de semelhança que vimos discutindo.

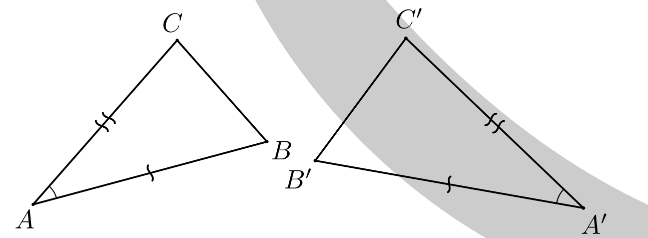
Teorema 1 (Critério AA de semelhança). *Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de ângulos correspondentes sejam congruentes, então a correspondência é uma semelhança. Em símbolos, dados os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$, *se* $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$ *e* $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Prova. Observe que, como a soma dos ângulos de todo triângulo é igual a $180°$, também temos

$$\begin{aligned} B\widehat{C}A &= 180° - A\widehat{B}C - B\widehat{A}C \\ &= 180° - A'\widehat{B}'C' - B'\widehat{A}'C' \\ &= B'\widehat{C'}A'. \end{aligned}$$

Portanto, os dois triângulos têm os três pares de ângulos correspondentes congruentes, de forma que o caso AAA de semelhança garante que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

Teorema 2 (Critério LAL de semelhança). *Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam são congruentes, então os triângulos são semelhantes. Em símbolos*[1], *dados os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$, *se* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ *e* $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

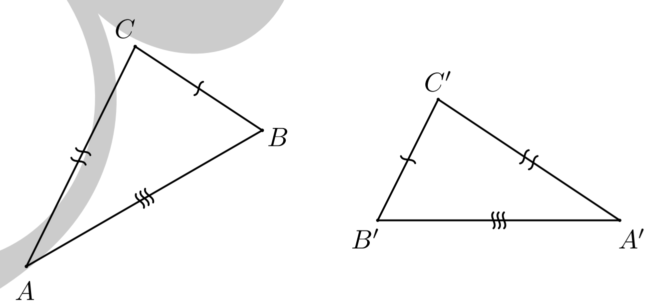


Prova. Consideremos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e $C\widehat{A}B = C'\widehat{A'}B'$. Como na demonstração do caso anterior, sejam G e H pontos em $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AG = A'B'$ e $AH = A'C'$. Também como lá, temos $\triangle A'B'C' \equiv \triangle AGH$ e, assim,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AH}.$$

Logo, ou $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{GH}$ (em cujo caso nada mais há a fazer) ou, pelo recíproco do Teorema de Tales, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{GH}$. Nesse último caso, os pares de ângulos correspondentes, quais sejam, $\angle AHG$, $\angle ACB$ e $\angle AGH$, $\angle ABC$, são formados por ângulos congruentes. Portanto, segue do Teorema 1 que $\triangle ABC \sim \triangle AGH$ e, portanto, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

Teorema 3 (Critério LLL de semelhança). *Se existe uma correspondência entre os vértices de dois triângulos tal que os pares de lados correspondentes são proporcionais, então os triângulos são semelhantes. Em símbolos, dados os triângulos* $\triangle ABC$ *e* $\triangle A'B'C'$ *se,* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, *então* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



[1]Oobserve que, nas notações da figura a seguir, os símbolos iguais associados aos pares de lados AB, $A'B'$ e AC, $A'C'$ não significam que tais lados sejam congruentes; eles estão presentes simplesmente para que o leitor possa visualizar mais rapidamente os pares de lados respectivamente proporcionais.

Prova. Consideremos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Sejam G e H pontos em $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AG = A'B'$ e $AH = A'C'$. Uma vez que

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AH} \quad \text{e} \quad G\widehat{A}H = B\widehat{A}C,$$

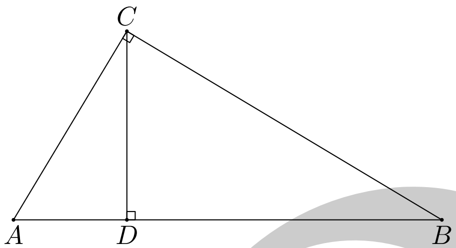
o critério LAL de semelhança (cf. Teorema 2) garante que $\triangle ABC \sim \triangle AGH$. Assim, $\frac{BC}{GH} = \frac{AB}{AG}$, de sorte que

$$GH = BC \cdot \frac{AG}{AB} = BC \cdot \frac{A'B'}{AB} = B'C'.$$

Portanto, o critério LLL de congruência de triângulos garante que $\triangle AGH \equiv \triangle A'B'C'$ e, então, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $\square$

Terminamos esta seção colecionando, nos dois resultados a seguir, duas importantes aplicações dos casos de semelhança de triângulos estudados acima.

Teorema 4. *Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa ao vértice do ângulo reto divide o triângulo em dois triângulos menores que são semelhantes entre si e também semelhante ao triângulo original.*



Prova. Consideremos um triângulo $\triangle ABC$, retângulo no vértice C, e seja $\overline{CD}$ a altura relativa a esse vértice (veja a figura acima), de sorte que o ponto D está situado sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, entre A e B. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$ e $A\widehat{B}C = 90°$, temos

$$A\widehat{C}D = A\widehat{B}C \quad \text{e} \quad B\widehat{C}D = C\widehat{A}D.$$

Portanto, segue do Teorema 1 que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ e $\triangle CBD$ são semelhantes entre si. $\square$

A prova do resultado a seguir fica como exercício para o leitor. Como sugestão, adapte a ideia utilizada nas demonstrações apresentadas dos critérios de semelhança de triângulos (você também pode achar útil revisar a demonstração do Exemplo 13 do material teórico referente ao Teorema de Tales, parte I).

Teorema 5. *Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança igual a r, então a razão entre os comprimentos de duas de suas alturas, medianas ou bissetrizes correspondentes também é igual a r. Mais geralmente, a razão entre dois elementos lineares correspondentes nos dois triângulos é igual a r.*

3 A homotetia

Esta seção enfoca o conceito de semelhança sob outro ponto de vista, qual seja, o das *transformações geométricas*. O material desta seção utiliza alguns conceitos relacionados a funções, podendo ser omitido numa primeira leitura.

Sejam Π um plano, O um ponto de Π e r um número real positivo. A **homotetia** de **centro** O e **razão** r é a *transformação* (i.e., a correspondência) $H_{O,r} : \Pi \to \Pi$ entre pontos de Π definida do seguinte modo: $H_{O,r}(O) = O$ e, para todo ponto X distinto de O, $X' = H_{O,r}(X)$ é o ponto da semirreta $\overrightarrow{OX}$ tal que $OX' = r \cdot OX$ (veja a figura abaixo).

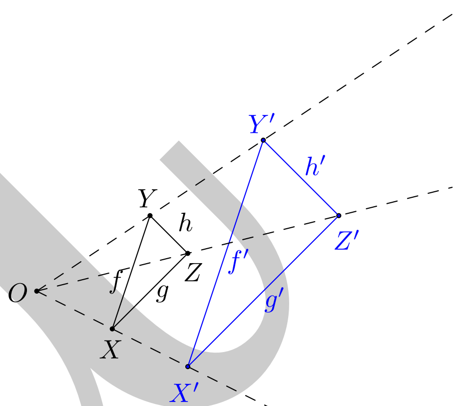
O resultado a seguir isola a propriedade fundamental das homotetias.

Teorema 6. *Toda homotetia é uma semelhança.*

Prova. Primeiramente, mostremos que a *imagem homotética* de um segmento é ainda um segmento. Para tanto, quando o ponto X está entre os pontos O e Y, é claro que O, X' e Y' são colineares e

$$X'Y' = OY' - OX' = r \cdot [OY - OX] = r \cdot XY.$$

Por outro lado, se O, X e Y são não colineares, consideremos os triângulos $\triangle XOY$ e $\triangle X'OY'$ (veja a figura abaixo).



Temos $OX' = r \cdot OX$ e $OY' = r \cdot OY$. Logo, segue do critério LAL de semelhança que os triângulos $\triangle XOY$ e $\triangle X'OY'$ são semelhantes, com razão de semelhança r. Portanto, $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ são paralelos, com $X'Y' = r \cdot XY$. $\square$

A seguir, colecionamos mais algumas propriedades importantes das homotetias, cujas demonstrações ficam como exercícios para o leitor.

Propriedades de uma Homotetia $H_{O,r}$:

Uma homotetia $H = H_{O,r}$ é um exemplo de transformação de semelhança e, assim, possui as seguintes propriedades, comuns a toda transformação de semelhança:

a) H transforma pontos colineares em pontos colineares. Mais, precisamente, se P está entre A e B, então $P' = H(P)$ está entre $A' = H(A)$ e $B' = H(B)$. Logo, a imagem de uma reta por H é uma reta e a imagem de um ângulo por H é ainda um ângulo;

b) H preserva medidas de ângulos, ou seja, para todo ângulo $\angle CAB$ temos $C'\widehat{A'}B' = C\widehat{A}B$. Em particular, H preserva perpendicularismo;

c) H preserva paralelismo de retas, isto é, se r e s são retas paralelas, então $r' = H(r)$ e $s' = H(s)$ são retas paralelas.

Além disso, uma homotetia $H_{O,r} : \Pi \to \Pi$ possui outras propriedades, particulares às homotetias, tais como as seguintes:

H1 - O único ponto fixado por uma homotetia *não trivial* (i.e., de razão diferente de 1) é o seu centro O. Em símbolos, para $r \neq 1$, temos $H_{O,r}(P) = P$ se, e somente se, $P = O$.

H2 - Toda reta m passando por O é invariante por $H_{O,r}$, ou seja, se m é uma reta contendo O, então $H_{O,r}(m) = m$.

H3 - Toda reta m que não passa por O é transformada por $H_{O,r}$ numa reta $m' = H_{O,r}(m)$ paralela à reta m.

H4 - A inversa de uma homotetia $H_{O,r}$ é uma homotetia de mesmo centro O e razão $\frac{1}{r}$. Assim, todo homotetia é uma *transformação involutiva*, i.e., a composta dela consigo mesma é a transformação identidade.

Dicas para o Professor

O conteúdo dessa aula pode ser visto em três encontros de 50 minutos cada. Recomendamos trabalhar as demonstrações dos critérios de semelhança, adequando as figuras apresentadas para refletir os argumentos apresentados nas argumentações. Para os resultados não demonstrados, sugerimos construir uma argumentação, fazendo uso do Teorema de Tales e seu recíproco, discutidos em notas anteriores, mostrando ao aluno que fatos geométricos realmente se apoiam na validade de outros resultados mais simples, já estudados.

A referência [2] contém vários exercícios simples envolvendo semelhança. Para o leitor interessado em aplicações mais elaboradas, sugerimos a referência [1]. Por fim, a referência [3] discute as propriedades das homotetias elencadas no texto, bem como traz várias aplicações interessantes.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeu. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2013.

3. E. Wagner. *Construções Geométricas.* Rio de Janeiro, S.B.M., 2007.