Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Produto Misto - Parte 1

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta primeira parte da aula sobre produto misto, estudaremos aa definição e algumas das propriedades básicas de determinantes. Não temos a intenção de fazer aqui uma exposição completa sobre a teoria dos determinantes. Em vez disso, exibiremos algumas motivações geométricas e coletaremos os resultados necessários para a segunda parte da aula.

1 Motivação para o estudo dos determinantes

Podemos interpretar os determinantes como um modo de denotar organizadamente expressões que dependem de somas e produtos. O mais importante é perceber que os determinantes admitem interpretações geométricas relevantes, algumas das quais serão estudadas nesta e na próxima parte da presente aula.

Dados n^2 números, podemos organizá-los na forma de uma tabela com n linhas e n colunas, que geralmente chamamos de **matriz quadrada**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Para cada elemento a_{ij}, o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna às quais esse elemento pertence. Chamamos o número natural n de **ordem** da matriz. O **determinante** da matriz A é denotado por $\det A$ ou pela utilização de barras verticais, em vez de parênteses:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se A é uma matriz de ordem n, dizemos que $\det A$ é um **determinante de ordem** n.

Se a ordem de um determinante é $n \geq 2$, calculamos o determinante usando o seguinte *algoritmo recursivo*[1], conhecido como *desenvolvimento de Laplace*[2]:

(1) Dada uma matriz A, escolhe-se e fixa-se uma linha ou uma coluna dessa matriz. Vamos, aqui, supor que foi escolhida a linha (horizontal) i de A, isto é, $a_{i1}, \dots, a_{in}$:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right).$$

(2) Para cada elemento a_{ij}, seja

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

onde A_{ij} é a matriz de ordem $n-1$, obtida a partir da matriz original, removendo-se dela a linha i e a coluna j.

(3) O determinante de A é igual a

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Exemplo 1. *Para calcular o determinante da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

aplicamos o desenvolvimento de Laplace ao longo da primeira linha de A. Assim fazendo, obtemos:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Convidamos o leitor a verificar que o desenvolvimento de Laplace ao longo de qualquer outra linha ou coluna dessa matriz, fornece o mesmo resultado.

Nesse caso, é fácil lembrar o resultado final: simplesmente multiplicamos os elementos da diagonal principal e, em seguida, subtraímos do resultado o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo 2. *Calculamos o determinante da matriz de ordem 3*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

da mesma maneira. A título de ilustração, desta vez aplicamos o desenvolvimento de Laplace ao longo da terceira coluna de A:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\ &= a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \\ &\quad + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \\ &\quad + a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

[1]Dizemos que um algoritmo é *recursivo* quando cada novo passo utiliza os passos anteriores. Em nosso caso, para calcular determinantes de matrizes de ordem n, precisamos já saber calcular determinantes de matrizes de ordem $n-1$.

[2]Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827), matemático, astrônomo e físico francês.

Executando os cálculos acima com o auxílio do resultado do exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\det A &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &\quad + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

A última soma tem seis parcelas, exatamente o número de permutações de três objetos. Novamente, é possível verificar-se que o resultado é o mesmo, independentemente da linha ou coluna escolhida.

Observação 3. *O desenvolvimento de Laplace, apresentado acima, requer a escolha de uma linha ou coluna. Para que esse método forneça um valor único, é necessário que* **o valor do determinante seja independente da escolha da linha ou coluna da matriz**. *Os cálculos para determinantes de ordem 2 ou 3 são relativamente simples e, por isso, deixamos a cargo dos leitores nos exemplos anteriores. A demonstração dessa propriedade no caso geral é simples, mas trabalhosa, e pode ser feita com o uso do princípio da indução finita. Vamos assumir este fato aqui, sem demonstração.*

A partir de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, podemos construir uma matriz $A^t = (a_{ji})$, de modo que as linhas de A^t, da primeira à última, são respectivamente iguais às colunas de A, da primeira à última (e vice-versa). A matriz A^t é chamada **matriz transposta** de A. Pela observação 3, concluímos que $\det(A^t) = \det(A)$.

Observação 4. *Note que cada parcela da última soma que expressa o determinante no Exemplo 2 é do tipo* $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$, *onde* $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ *é uma função bijetiva, que chamamos de uma* **permutação de três elementos**. *Existem seis permutações de três elementos, e cada uma delas corresponde a uma parcela da soma citada acima. Se* $i, j \in \{1,2,3\}$, $i < j$ *e* $\sigma(i) > \sigma(j)$, *dizemos que* σ *tem uma* **inversão**. *Se o número de inversões de uma permutação* σ *é* $\varepsilon(\sigma)$, *então o sinal da parcela que corresponde a* σ *na soma que dá o determinante é* $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$.

Por exemplo, a primeira parcela da última soma no Exemplo 2 é $a_{13}a_{21}a_{32}$; *nela, temos* $1 < 2$ *e* $\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$; $1 < 3$ *e* $\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(3)$; $2 < 3$ *e* $\sigma(2) = 1 < 2 = \sigma(3)$. *Assim, essa permutação tem, ao todo, duas inversões, logo, o sinal da parcela correspondente é positivo. Já a última parcela é igual a* $a_{12}a_{21}a_{33}$. *Nesse caso, temos* $1 < 2$ *e* $\sigma(1) = 2 > 1 = \sigma(2)$; $1 < 3$ *e* $\sigma(1) = 2 < 3 = \sigma(3)$; $2 < 3$ *e* $\sigma(2) = 1 < 3 = \sigma(3)$. *Ao todo, essa permutação tem uma inversão, logo, o sinal da parcela correspondente é negativo.*

Observação 5. *Um modo prático de se calcular um determinante de ordem 3 é conhecido como* **regra de Sarrus**, *pois foi apresentado em 1842 à academia de ciências de Paris pelo matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861). Ele consiste no seguinte: para se calcular o determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

repetem-se as duas primeiras colunas à direita da terceira coluna (em vermelho, abaixo):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} \end{vmatrix}.$$

Os elementos dessa nova tabela devem, então, ser multiplicados seguindo o esquema mostrado a seguir:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}. \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Os elementos ao longo de uma mesma linha cheia devem ser multiplicados e considerados com sinal positivo, enquanto os elementos ao longo de uma mesma linha tracejada devem ser multiplicados e considerados com sinal negativo. Assim, obtemos a soma $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, *que é exatamente aquela que obtivemos no Exemplo 2.*

Exemplo 6. *Calcule o determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solução. Usando a regra de Sarrus, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 8 - 2 - 12 + 1 + 12 = 0.$$

$\square$

Até este ponto, os determinantes são apenas somas de produtos e não parece claro em que eles possam vir a ser úteis. Começamos a contornar esse estado de coisas com os próximos exemplos, os quais apontam algumas interpretações geométricas dos determinantes de ordem 2. Essas propriedades também valem para determinantes de ordens maiores, mas suas demonstrações são em geral menos elementares que no caso bidimensional.

Exemplo 7. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes. Consideremos a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Nas notações da Figura 1 (e conforme a discussão a seguir), essa função transforma o quadrado Q de lado 1 em um paralelogramo (possivelmente degenerado) de área igual a $|\det(A)|$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a **matriz correspondente** *ou* **associada** *à função T.*

A principal propriedade da função T é o que chamamos de **linearidade**: se $\overrightarrow{u} = (x, y)$, $\overrightarrow{v} = (z, w)$ são vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} T(\alpha\overrightarrow{u}) &= T(\alpha x, \alpha y) \\ &= (a(\alpha x) + b(\alpha y), c(\alpha x) + d(\alpha y)) \\ &= \alpha(ax + by, cx + dy) \\ &= \alpha T(\overrightarrow{u}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= T((x, y) + (z, w)) \\ &= T(x + z, y + w) \\ &= (a(x + z) + b(y + w), c(x + z) + d(y + w)) \\ &= (ax + by, cx + dy) + (az + bw, cz + dw) \\ &= T(x, y) + T(z, w) \\ &= T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Uma função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as duas propriedades:

(1) $T(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v})$,

(2) $T(\alpha\overrightarrow{u}) = \alpha T(\overrightarrow{u})$,

é chamada **transformação linear**.

Voltando ao caso $n = 2$, qualquer vetor $\overrightarrow{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$\overrightarrow{u} = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2,$$

onde $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores que formam o que chamamos de **base canônica** do $\mathbb{R}^2$.

Nas notações da figura a seguir, o quadrado Q de lado 1 é o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Dessa forma, se $(x, y) \in Q$, então

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2) \\ &= xT(\overrightarrow{e}_1) + yT(\overrightarrow{e}_2) \\ &= xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ &= x(a, c) + y(b, d), \end{aligned}$$

com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Portanto, *se os vetores (a, c) e (b, d) não forem paralelos*, o conjunto formado pelas imagens $T(x, y)$, com $(x, y) \in Q$, é o paralelogramo determinado por esses vetores.

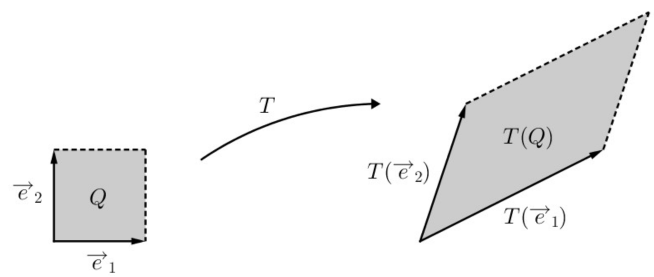

Figura 1: a função T transforma o quadrado em um paralelogramo.

Conforme já vimos na aula sobre produto vetorial, a área do paralelogramo $T(Q)$ é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores $T(\overrightarrow{e}_1)$ e $T(\overrightarrow{e}_2)$, vistos como vetores em $\mathbb{R}^3$. Em símbolos, essa área é igual a

$$\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array} \right| = |ad - bc| = |\det(A)|.$$

No caso em que $\det(A) = 0$, temos $ad = bc$. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t \in \mathbb{R}$, ou seja, $(a, c) = (tb, td) = t(b, d)$ e os vetores (a, c) e (b, d) são paralelos neste caso. Por sua vez, isto significa que o paralelogramo determinado por tais vetores é “degenerado” e tem área igual a zero. Os casos em que $b = 0$ ou $d = 0$ também fornecem paralelogramos degenerados, com área igual a zero.

Se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, o quadrado Q_ℓ de lado ℓ pode ser obtido a partir do quadrado Q de lado 1 multiplicando-se os vetores $\overrightarrow{e}_1$ e $\overrightarrow{e}_2$ por ℓ. Repetindo o que fizemos acima, podemos concluir que a área do paralelogramo $T(Q_\ell)$, imagem do quadrado de lado ℓ pela transformação linear T, é igual a $|\det(A)|\ell^2$.

Observação 8. *De um modo geral, é possível mostrar que uma figura F, de área a, é transformada por uma transformação linear T em uma figura $T(F)$ de área $|\det(A)| \cdot a$. Isso pode ser feito usando-se o* princípio da exaustão. *Heuristicamente, primeiramente aproxima-se F por uma união de quadrados Q_j, de interiores dois a dois disjuntos e contidos em F; então, com o auxílio da discussão anterior, calcula-se*

$$A(T(Q_j)) = |\det A| \cdot A(Q_j),$$

temos

$$\begin{aligned} A(T(F)) &\cong \sum_j A(T(Q_j)) = \sum_j A(Q_j) \\ &= \sum_j |\det A| \cdot A(Q_j) \\ &= |\det A| \cdot \sum_j A(Q_j) \\ &\cong |\det A| \cdot A(F). \end{aligned}$$

O próximo exemplo ajuda a esclarecer o significado geométrico do *sinal* do determinante de uma matriz de ordem 2.

Exemplo 9. *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $T(x, y) = (x, -y)$ *é uma* **reflexão** *em torno do eixo* x*. A matriz associada a* T *é* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*, que tem determinante igual a* -1*.*

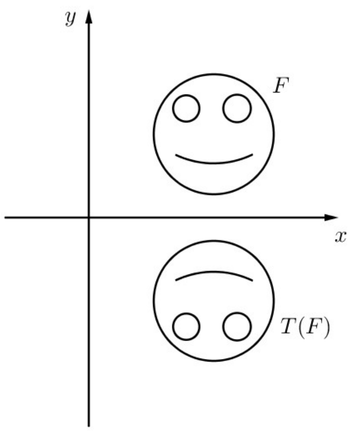

Figura 2: a função T é uma reflexão em relação ao eixo x. Ela altera a orientação das figuras.

Em geral, pode-se demonstrar que uma transformação linear do plano no plano tem matriz associada com determinante negativo se, e somente se, ela *altera a orientação* das figuras. Não demonstraremos essa afirmação aqui pois, a essa altura, não temos sequer como fornecer uma definição precisa de orientação. Convidamos o leitor a verificar, pelo menos em alguns casos particulares, que a reflexão em torno de uma reta que passa pela origem e tem ângulo de inclinação θ, tem matriz associada dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, se $\theta = 0$, obtemos a reflexão do Exemplo 9. Veja que

$$\det A_\theta = -(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta) = -1.$$

Exemplo 10. *Consideremos as transformações lineares* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dadas respectivamente por* $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$ *e* $S(x, y) = (a'x+b'y, c'x+d'y)$*, com* $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$*. As matrizes que correspondem a* T *e* S *são, respectivamente,* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e* $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$*. A seguir, vamos obter a matriz que corresponde à função composta* $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y))$*.*

Fazendo as substituições convenientes, obtemos

$$\begin{aligned}(S \circ T)(x, y) &= S(T(x, y)) = S(ax + by, cx + dy) \\ &= (a'(ax + by) + b'(cx + dy), \\ &\quad c'(ax + by) + d'(cx + dy)) \\ &= ((a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y, \\ &\quad (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y).\end{aligned}$$

Logo, a matriz correspondente à composta $S \circ T$ é

$$\begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

onde o símbolo "$\cdot$" indica a multiplicação das matrizes A e B, nessa ordem. Realmente, a multiplicação de matrizes de ordem 2 é dada exatamente pela expressão acima, sendo assim definida de modo a corresponder à composição das transformações lineares correspondentes.

Como a composição de funções não é comutativa, a multiplicação de matrizes, em geral, também não é comutativa. Por outro lado, a associatividade da composição de funções implica a associatividade da multiplicação de matrizes.

Também temos o seguinte fato importante.

Proposição 11. *Se* A *e* B *são duas matrizes quadradas de ordem* 2*, então* $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$*.*

Na expressão acima, $A \cdot B$ é o produto das matrizes A e B, como em (1).

Como as matrizes envolvidas na proposição anterior são de ordem 2, ela certamente pode ser justificada pondo $A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e, em seguida, calculando sucessivamente $A \cdot B$, $\det(A \cdot B)$, $\det(A)\det(B)$.

Outra justificativa (mais "limpa") é a seguinte: suponha que F é uma figura plana com área igual a a. Pela discussão anterior, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear com matriz associada B, a figura $T(F)$ tem área $|\det(B)|a$ e a figura $S(T(F))$ tem área igual a $|\det(A)\det(B)|a$. Por outro lado, uma vez que $S(T(F)) = (S \circ T)(F)$, essa figura tem área igual a $|\det(A \cdot B)|a$. Comparando esses dois valores, obtemos $|\det(A \cdot B)| = |\det(A)\det(B)|$, logo esses dois valores divergem no máximo pelo sinal. Agora, utilizando a relação entre orientação e o sinal do determinante, dada acima, vemos o seguinte: se S e T preservam a orientação das figuras, então $S \circ T$ também preserva essa orientação. Se uma dessas duas transformações altera a orientação e a outra a preserva, então a composta altera a orientação. Finalmente, se ambas alteram a orientação das figuras, então a composta preserva a orientação, pois esta foi alterada duas vezes (como a imagem refletida por dois espelhos, que adquire a orientação da imagem original). Como essa mesma regra de composição vale para os sinais dos determinantes das matrizes correspondentes, concluímos que a igualdade da Proposição 11 é válida.

Para matrizes quadradas de ordem qualquer, esse resultado é conhecido como **Teorema de Binet**, em honra ao matemático francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856).

2 Algumas propriedades dos determinantes

Nesta seção, iremos coletar algumas propriedades dos determinantes que facilitam o seu cálculo e que serão usadas na parte 2 desta aula.

De início, vale a pena reforçar que a interpretação geométrica do determinante como área se estende para dimensões maiores. Por exemplo, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que tem matriz associada A, transforma um cubo de volume 1 em um paralelogramo (possivelmente degenerado) de volume $|\det(A)|$. Em dimensões maiores do que 3, o valor absoluto continua a significar "volume" da mesma maneira, ou seja, é a medida da imagem pela transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de um "bloco regular" em dimensão n.

Em particular, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

veremos na parte 2 desta aula que $|\det(A)|$ é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ e (a_{13}, a_{23}, a_{33}); também veremos que há um significado para o sinal desse determinante.

De um modo mais geral, vamos adotar a seguinte notação:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (C_1, \ldots, C_n),$$

onde $C_1, \ldots, C_n$ são as n colunas da matriz quadrada A. Dessa forma, podemos ver o determinante $\det(A)$ como uma função $\det(C_1, \ldots, C_n)$, que depende das n colunas da matriz A. As principais propriedades do determinante podem ser enunciadas usando-se essa notação.

(1) *O determinante* $\det(A)$ *é linear como função de cada uma das colunas da matriz* A, ou seja,

$$\begin{gathered} \det(C_1, \ldots, C_j + C_j', \ldots, C_n) = \\ = \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \det(C_1, \ldots, C_j', \ldots, C_n) \end{gathered} \tag{2}$$

e

$$\det(C_1, \ldots, \alpha C_j, \ldots, C_n) = \alpha \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n). \tag{3}$$

Para determinantes de ordem, esse resultado é imediato. De fato:

$$\begin{aligned} \det(C_1, C_2 + C_2') &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} + a_{22}' \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} + a_{22}') - a_{21}(a_{12} + a_{12}') \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (a_{11}a_{22}' - a_{21}a_{12}') \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22}' \end{vmatrix} \\ &= \det(C_1, C_2) + \det(C_1, C_2'). \end{aligned}$$

Também, a demonstração da igualdade $\det(C_1 + C_1', C_2) = \det(C_1, C_2) + \det(C_1', C_2)$ é análoga à que foi feita acima.

No caso geral, temos

$$\det(C_1, \ldots, C_j + C_j', \ldots, C_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} + a_{ij}' & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + a_{nj}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

De acordo com a Observação 3, podemos escrever o desenvolvimento de Laplace em relação à coluna j, obtendo

$$\begin{aligned} &\det(C_1, \ldots, C_j + C_j', \ldots, C_n) = \\ &= (a_{1j} + a_{1j}')C_{1j} + \cdots + (a_{nj} + a_{nj}')C_{nj} \\ &= (a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}) + (a_{1j}'C_{1j} + \cdots + a_{nj}'C_{nj}) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \det(C_1, \ldots, C_j', \ldots, C_n). \end{aligned}$$

(Atenção: não devemos confundir a notação C_j, que indica a coluna j da matriz do determinante que estamos calculando, com $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, onde A_{ij} é a matriz obtida excluindo-se da matriz A a linha i e a coluna j).

A propriedade (3) pode ser demonstrada de modo similar.

(2) *Se duas colunas (ou linhas) em um determinante de ordem maior ou igual a 2 são iguais, então esse determinante é igual a zero.*

Novamente, os casos em que o determinante tem ordem 2 ou 3 são relativamente simples. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0$$

e

$$\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} b & b \\ c & c \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0.$$

Em geral, assumindo que qualquer determinante de ordem menor do que n que tem duas colunas iguais é igual a zero, tomemos um determinante de ordem n com duas colunas iguais. Calculando-o pelo desenvolvimento de Laplace relativo a uma coluna que *não* é uma das que são sabidamente iguais, obtemos uma soma do tipo

$$a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det(A_{nj}),$$

onde cada matriz A_{ij} ainda tem duas colunas iguais e tem ordem $n-1$. Portanto, todas as parcelas acima são nulas e a soma também é nula.

(3) *A troca de posição entre duas colunas de um determinante altera o sinal desse determinante.*

De fato, a propriedade (2) garante que

$$\det(C_1, \ldots, C_i + C_j, \ldots, C_j + C_i, \ldots, C_n) = 0,$$

pois ele tem duas colunas repetidas. Pela linearidade, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \det(C_1, \ldots, C_i + C_j, \ldots, C_j + C_i, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_i, \ldots, C_n) \\ &\quad + \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &\quad + \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n) \\ &\quad + \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) \\ &\quad + \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Das igualdades acima, segue que

$$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) =$$

$$= -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula. Se a sua turma nunca teve contato com a noção de determinante, será necessário pelo menos mais uma aula.

O objetivo da primeira seção é dar ao determinante um significado geométrico: o determinante de uma matriz mede o quanto a transformação linear associada a essa matriz altera as medidas das figuras. No caso de matrizes de ordem 2, essa medida é a área das figuras.

Das propriedades dos determinantes listadas na Seção 2, as duas primeiras são as mais importantes: a linearidade em relação a cada coluna e o anulamento do determinante que tem duas colunas iguais. Funções em várias variáveis com essas duas propriedades são chamadas de funções *multilineares alternadas*. O determinante é o membro mais famoso dessa família de funções.

Nesta aula, a apresentação das propriedades dos determinantes tem como principal objetivo dar suporte às aplicações que estão na parte 2. Se você achar conveniente, pode trabalhar as duas partes concomitantemente, começando com a Seção 1 desta primeira parte, passando à parte 2 e voltando à Seção 2 desta parte 1 quando necessário. Isso pode dar maior dinamismo à sua aula, pois os estudantes irão ver de imediato aplicações interessantes da noção de determinante.

A Observação 4 pode ser ignorada em uma primeira leitura, ou se você estiver trabalhando com uma turma sem muita experiência com determinantes. Caso você queira explorar algumas conexões entre determinantes, Combinatória e os rudimentos da Teoria dos Grupos, pode dar mais ênfase à Observação 4.

Sugestões de Leitura Complementar

1. N. M. dos Santos et al. *Vetores e Matrizes: Uma Introdução à Álgebra Linear.* Cengage Learning, São Paulo, 2007.
2. M. R. Spiegel. *Análise Vetorial*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1972.