

Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 1 - Fundamentos

Pontos, Retas e Planos - Parte 1

Terceiro Ano do Ensino Médio

Prof. Angelo Papa Neto



1 Axiomas da geometria no espaço

Em nosso estudo de geometria espacial, vamos considerar o **espaço E** como um conjunto cujos elementos serão chamados **pontos**. No que se segue, pontos serão denotados por letras latinas maiúsculas: A, B, C etc.

Um subconjunto \mathcal{F} de E é denominado uma **figura** do espaço. No espaço E há dois tipos especiais de figuras: **retas**, que denotaremos usando letras latinas minúsculas: r, s, t etc. e **planos**, que serão denotados por letras gregas minúsculas: α, β, γ etc.

Observe que *não definimos* ponto, reta ou plano. A princípio, retas e planos são meramente conjuntos de pontos, ou seja, figuras de E . Esses conjuntos são caracterizados não por uma definição, mas por certas *propriedades básicas* que eles possuem. Objetos matemáticos caracterizados dessa maneira são denominados **noções primitivas**. Por outro lado, as propriedades básicas das noções primitivas de ponto, reta e plano, listadas a seguir, são assumidas como válidas sem necessidade de demonstração (i.e., de justificativa); por isso, dizemos que se tratam dos **axiomas** relativos a pontos, retas e planos do espaço E .

- (E-1) Por dois pontos do espaço passa uma e somente uma reta.
- (E-2) Dada uma reta t no espaço, existem pontos que pertencem a t e pontos que não pertencem a t .
- (E-3) Por três pontos do espaço, não situados em uma mesma reta, passa um e somente um plano.
- (E-4) Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.
- (E-5) Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum, logo, pelo menos uma reta em comum.

Também vamos assumir a validade do seguinte fato:

- (E-6) Os resultados da geometria plana continuam válidos para figuras que estejam contidas em um plano α de E .

Com os axiomas acima, já podemos obter alguns resultados importantes.

Teorema 1. *Se dois planos distintos têm pelo menos um ponto em comum, então eles têm exatamente uma reta em comum.*

Prova. Sejam α e β dois planos distintos, com pelo menos um ponto em comum. Pelo axioma (E-5), α e β têm pelo menos uma reta r em comum. Por contradição, suponha que $\alpha \cap \beta \neq r$. Então podemos tomar um ponto C em $\alpha \cap \beta$, tal que $C \notin r$. Sendo A e B dois pontos de r , temos que A, B e C não estão situados sobre uma mesma reta (uma

vez que $C \notin r$). Logo, segue do axioma (E-3) que A, B e C determinam um único plano γ . Mas, como $A, B, C \in \alpha, \beta$, concluímos que $\alpha = \gamma = \beta$, o que é um absurdo. \square

Teorema 2. *Se uma reta tem dois de seus pontos em um plano, então ela está contida nesse plano.*

Prova. Seja r uma reta e α um plano com dois pontos em comum. Sejam $A, B \in r \cap \alpha$ esses pontos. Da geometria plana, sabemos que existe uma única reta no plano α , contendo os pontos A e B . Chamemos essa reta de t , de modo que $t \subset \alpha$. Pelo axioma (E-1) acima, existe uma única reta no espaço que passa por A e B . Mas, como r e t passam por A e B , temos que $r = t \subset \alpha$. \square

Teorema 3. *Por uma reta r e um ponto $P \notin r$ passa um único plano.*

Prova. Sejam A e B dois pontos distintos sobre a reta r . Então A, B e P são três pontos distintos e não colineares. Logo, pelo axioma (E-3), existe um único plano α contendo esses três pontos. Em particular, como α contém A e B , temos pelo Teorema 2 que $r \subset \alpha$. \square

Mais alguns comentários sobre os axiomas: (E-2) e (E-4) garantem que o espaço E tem uma abundância de pontos. Mais precisamente, (E-2) garante que não existem retas vazias e que o espaço todo não é meramente uma reta. Da mesma forma, (E-4) garante que não existem planos vazios e que o espaço E não é meramente um plano.

A unicidade exigida em (E-1) e (E-3) garante que os objetos “reta” e “plano” que estamos estudando correspondem à noção intuitiva que temos sobre eles.

Do axioma (E-5), podemos inferir que dois planos no espaço podem ocupar apenas três posições relativas:

- (i) ou são **coincidentes** (situação em que, pelo axioma (E-3), têm pelo menos três pontos em comum);
- (ii) ou são **paralelos** (quando não têm pontos em comum);
- (iii) ou são **secantes** (situação em que têm exatamente uma reta em comum).

Exemplo 4. *Seja \mathcal{F} uma figura tal que quaisquer quatro de seus pontos pertencem a um mesmo plano. Mostre que \mathcal{F} está contida em um plano.*

Solução. Se \mathcal{F} tem no máximo três pontos, então \mathcal{F} está contida em algum plano. Vamos, então, supor que \mathcal{F} tem pelo menos quatro pontos. Se todos os pontos de \mathcal{F} estiverem em uma mesma reta, eles estarão contidos em qualquer plano que contenha essa reta. Podemos supor, então, que em \mathcal{F} há pelo menos três pontos não colineares A, B e C . Seja α o plano determinado por esses três pontos. Se $P \in \mathcal{F}$ é um ponto diferente de A, B e C , então A, B, C e P estão contidos em um mesmo plano, que tem que ser o plano α , pelo axioma (E-3). \square

2 Posições relativas de retas no espaço

Os axiomas vistos na seção anterior garantem que existem em E duas retas que não estão contidas em um mesmo plano. De fato, pelo axioma (E-2) podemos considerar três pontos não colineares A, B e C . Seja π o plano determinado por esses três pontos (de acordo com o axioma (E-3)). Seja P um ponto fora do plano π (o qual existe, pelo axioma (E-4)). Afirmamos que as retas BC e AP não estão contidas em um mesmo plano. De fato, se essas retas estivessem contidas em um mesmo plano, então esse plano conteria os pontos A, B, C e P , o que não é possível, pois, por construção, P não pertence ao plano que passa por A, B e C .

Duas retas que não pertencem a um mesmo plano são chamadas **retas reversas** (veja a figura 1). Por outro lado, se duas retas estão situadas em um mesmo plano mas não se intersectam, dizemos que elas são **retas paralelas**. Escrevemos $r \parallel s$ para indicar que as retas r e s são paralelas. Finalmente, se duas retas distintas se intersectam, dizemos que elas são **retas concorrentes**. Nesse último caso, a interseção entre as retas é formada por um único ponto, dito o **ponto de interseção** entre as retas. Note que, se r e s têm pelo menos dois pontos em comum, então $r = s$ pelo axioma (E-1).

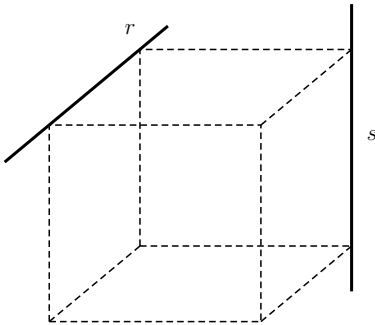


Figura 1: as retas r e s são reversas.

Como duas retas paralelas são necessariamente **coplanares**, isto é, estão contidas em um mesmo plano, podemos afirmar que, se $r \parallel s$, então existe um único plano que contém r e s . O teorema a seguir mostra que o mesmo resultado vale se r e s são concorrentes.

Teorema 5. *Dois retas concorrentes determinam um único plano.*

Prova. Sejam r e s as duas retas, e seja $r \cap s = \{A\}$. Sejam $B \in r$ e $C \in s$, com $B \neq A$ e $C \neq A$. Então, A, B e C não são colineares, pois do contrário teríamos $r = s$, o que não ocorre. Pelo axioma (E-3), existe um único plano

α passando pelos três pontos A, B e C ; logo, α é o único plano que contém as retas r e s . \square

Exemplo 6. *Considere um conjunto de retas do espaço, contendo pelo menos três retas distintas. Mostre que, se duas quaisquer dessas retas são concorrentes, então elas estão todas em um mesmo plano ou passam todas por um mesmo ponto.*

Prova. Seja \mathcal{C} esse conjunto de retas e sejam $r, s \in \mathcal{C}$ duas retas distintas. Se $t \in \mathcal{C}$ e $t \neq r, t \neq s$, então, por hipótese, sabemos que $t \cap r = \{A\}$ e $t \cap s = \{B\}$, para certos pontos A e B . Se $A = B$, então r, s e t passam por A . Se $A \neq B$, então t está contida no plano determinado por r e s , pois tem dois pontos (A e B) em comum com esse plano (veja o Teorema 2).

Agora, se nem todas as retas de \mathcal{C} passam por um mesmo ponto, então existem retas distintas $r, s, t \in \mathcal{C}$, tais que $r \cap s = \{A\}$ e $r \cap t = \{B\}$ e $s \cap t = \{C\}$, com A, B e C dois a dois distintos. Seja também u o plano determinado pelos pontos A, B e C , e u uma quarta reta em \mathcal{C} . Como u concorre com r, s e t , temos $u \cap r = \{D\}$, $u \cap s = \{E\}$ e $u \cap t = \{F\}$, para certos pontos D, E e F . Veja que não podemos ter $D = E = F$ pois, do contrário esse ponto seria comum a r, s e t , o que não é o caso. Suponha, pois, sem perda de generalidade, que $D \neq E$. Então D, E são pontos distintos de α , de forma que $u \subset \alpha$. \square

A relação de paralelismo de retas é **simétrica**, ou seja, se $r \parallel s$, então $s \parallel r$. O teorema a seguir garante que a relação de paralelismo também é **transitiva**, isto é, que se $r \parallel t$ e $t \parallel s$, então $r \parallel s$.

Teorema 7. *Se duas retas distintas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.*

Prova. Sejam r, s e t três retas dadas, duas a duas distintas, e suponhamos que $r \parallel t$ e $t \parallel s$. Queremos mostrar que $r \parallel s$.

Se as três retas estão situadas em um mesmo plano, α digamos, então a conclusão do teorema é verdadeira, pois se trata de uma propriedade da geometria plana, aplicada ao plano α . Portanto, é suficiente analisarmos o caso em que as retas r, s e t não são coplanares.

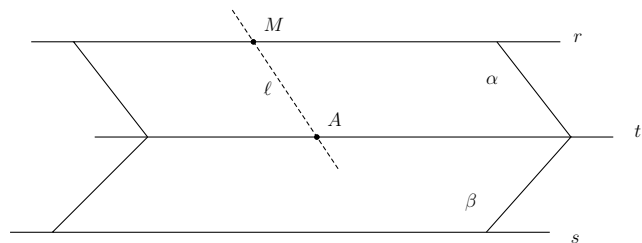


Figura 2: transitividade do paralelismo.

Seja α o plano que passa pelas retas r e t e β o plano determinado pelas retas s e t . Uma vez que as três retas não estão contidas em um mesmo plano, existe um ponto M que pertence à reta r mas não pertence ao plano β .

Seja γ o plano determinado pela reta s e pelo ponto M . Como $M \in r \subset \alpha$ e $M \in \gamma$, temos que $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset$. Os planos α e γ são distintos, pois a reta s está contida em γ mas não em α . Assim, pelo axioma (E-5), a interseção entre os planos α e γ é uma reta, que vamos chamar de ℓ .

Vamos, agora, mostrar que $\ell = r$. Para tanto, veja primeiramente que ℓ e t estão contidas no plano α e r é a única reta de α que passa por M e é paralela a t . Portanto, se $r \neq \ell$, então ℓ e t não podem ser paralelas e, daí, têm um ponto em comum, digamos A .

Assim, o plano γ contém a reta $s \subset \beta$ e o ponto $A \in \beta$. Pelo Teorema 3, somos forçados a concluir que $\beta = \gamma$. Mas isso é uma contradição, pois $M \in \gamma$ e $M \notin \beta$.

A contradição obtida acima vem de termos suposto que $\ell \neq r$. Logo, $\ell = r$ e, em particular, as retas r e s estão contidas em um mesmo plano (o plano γ).

Vamos, por fim, mostrar que r e s são paralelas. Suponhamos o contrário, isto é, que r e s se intersectam em um ponto B . Então, o plano α passa por t e por $B \in r$ e o plano β passa por t e por $B \in s$. Novamente pelo Teorema 3, $\alpha = \beta$, o que contradiz nossa hipótese de que as três retas r, s, t não são coplanares. Isso mostra que r e s são paralelas. \square

Exemplo 8. Seja r uma reta qualquer e s uma reta não paralela a r . Mostre que todas as retas paralelas a s e concorrentes com r estão contidas em um mesmo plano.

Solução. Se r e s não são paralelas, então r e s são concorrentes ou reversas. Caso sejam concorrentes, o Teorema 5 garante que elas determinam um plano α . Ainda nesse caso, seja t uma reta paralela a s e tal que $t \cap r = \{P\}$. As retas t e s determinam um plano β que contém s e P . Mas o plano α contém s e r , logo, também contém s e P . Dessa forma, pelo Teorema 3, $\alpha = \beta$ e a reta t está contida em α .

Vamos supor agora que r e s sejam reversas. Sejam t_1 e t_2 duas retas paralelas a s e concorrentes com r nos pontos P_1 e P_2 , respectivamente. Pelo Teorema 7, t_1 é paralela a t_2 , de forma que, em particular, $P_1 \neq P_2$. Além disso, t_1 e t_2 determinam um plano α que contém r , pois essa reta tem os pontos P_1 e P_2 em comum com α . Agora, se t é uma reta qualquer, paralela a s e concorrente com r , mostremos que $t \subset \alpha$. Inicialmente, como $t \parallel s$ e $s \parallel t_1$, segue novamente do Teorema 7 que t é paralela a t_1 (e a t_2). Mas, sendo $t \cap r = \{P\}$ e β o plano contendo t e t_1 , teríamos $t_1 \subset \alpha, \beta$ e (uma vez que $P, P_1 \in \beta$) $r, t_1 \subset \alpha, \beta$. Como $r \neq t_1$ (pois, do contrário, teríamos $r = t_1 \parallel s$), o Teorema 1 garante que $\alpha = \beta$. Logo, $t \subset \alpha$. \square

3 Posições relativas entre retas e planos

Assim como no caso da posição relativa entre duas retas, as posições relativas entre uma reta r e um plano α dependem da interseção $r \cap \alpha$.

Se uma reta r e um plano α têm pelo menos dois pontos em comum, então, pelo Teorema 2, r está contida em α .

Se uma reta r tem um único ponto em comum com um plano α , dizemos que r e α são **secantes**. Nesse caso, o ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$ é chamado **ponto de interseção** de r e α .

Se uma reta e um plano não têm pontos em comum, isto é, se $r \cap \alpha = \emptyset$, dizemos que a reta r é **paralela** ao plano α .

Teorema 9. Sejam α e β dois planos cuja interseção é a reta ℓ , e seja r uma reta contida em α e paralela ao plano β . Então as retas ℓ e r são paralelas.

Prova. Como r é paralela a β , temos $r \cap \beta = \emptyset$. Logo, $r \cap \ell \subset r \cap \beta = \emptyset$ e, daí, $r \cap \ell = \emptyset$. Mas, como r e ℓ são coplanares (pois estão ambas contidas em α), concluímos que $r \parallel \ell$. \square

A seguir, exibiremos um critério para o paralelismo entre uma reta e um plano.

Teorema 10. Para que uma reta r seja paralela a um plano α , é necessário e suficiente que r seja paralela a uma reta s de α .

Prova. Inicialmente, suponhamos que $r \parallel \alpha$, isto é, $r \cap \alpha = \emptyset$. Sejam $P \in \alpha$ e (pelo Teorema 3) β o plano determinado por r e P (veja a figura 3). Como $P \in \alpha \cap \beta$ e $\alpha \neq \beta$ (pois $r \subset \beta$ e $r \cap \alpha = \emptyset$), o Teorema 1 garante que $\alpha \cap \beta$ é uma reta, que vamos chamar de s . Então, $s \subset \alpha$ e $s \parallel r$, pois r e s estão contidas em um mesmo plano (o plano β) e $r \cap s \subset r \cap \alpha = \emptyset$.

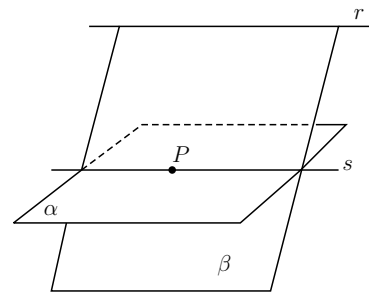


Figura 3: reta paralela a plano.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma reta s , contida em α e paralela a r (veja novamente a figura 3). Por contradição, suponhamos que exista um ponto

$M \in r \cap \alpha$. Então, em particular, o ponto M pertence ao plano β , determinado pelas retas paralelas r e s . Assim, $M \in \alpha \cap \beta = s$, de modo que $M \in r \cap s = \emptyset$, um absurdo. Isso mostra que r e α não têm pontos em comum, ou seja, são paralelos. \square

Exemplo 11. Sejam A, B, C e D quatro pontos não necessariamente coplanares. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA , respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo.

Solução. A figura 4 ilustra a situação descrita no enunciado do exemplo. Como os pontos A, B, C e D não são necessariamente coplanares, o quadrilátero que os tem por vértices também não está necessariamente contido em um plano (denominamos um tal tipo de quadrilátero – não contido em um plano – de **quadrilátero reverso**).

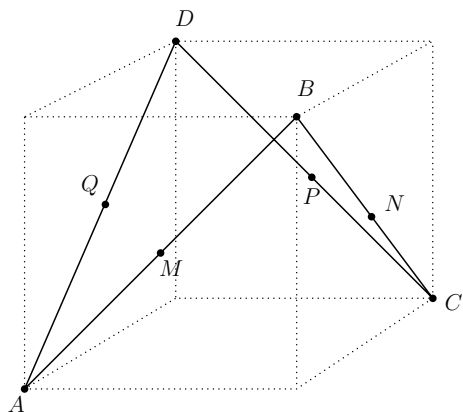


Figura 4: um quadrilátero reverso.

Queremos mostrar que os pontos médios M, N, P e Q são vértices de um paralelogramo. Em particular, isso implicará que M, N, P e Q são coplanares.

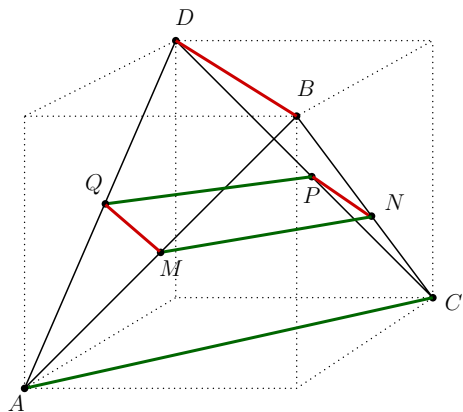


Figura 5: o paralelogramo formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso.

Para tanto, observe que o segmento MN (em verde, na figura 5) é base média do triângulo ABC , relativa ao lado AC . Logo, pelo Teorema da Base Média, MN é paralelo a AC . Da mesma forma, o segmento PQ (também em verde) é base média do triângulo ACD relativa ao lado AC . Portanto, novamente pelo Teorema da Base Média, PQ é paralelo a AC . Portanto, pela transitividade do paralelismo (veja o Teorema 7), segue que MN é paralelo a PQ . Em particular, os quatro pontos M, N, P e Q pertencem a um mesmo plano, o determinado pelas retas paralelas \overleftrightarrow{MN} e \overleftrightarrow{PQ} .

Aplicando raciocínio análogo aos segmentos coloridos em vermelho na figura 5 (os quais são as bases médias relativas ao lado BD dos triângulos ABD e CBD), concluímos que MQ é paralelo a NP . Portanto, o quadrilátero plano de vértices M, N, P e Q tem pares de lados opostos paralelos, logo é um paralelogramo. \square

4 Planos paralelos

Dois planos são ditos **paralelos** se não têm pontos em comum. Usamos a notação $\alpha \parallel \beta$ para indicar que os planos α e β são paralelos. Assim,

$$\alpha \parallel \beta \iff \alpha \cap \beta = \emptyset.$$

O teorema a seguir relaciona os conceitos de paralelos para retas e planos.

Teorema 12. Se dois planos paralelos são intersectados por um terceiro plano, então as retas de interseção são paralelas.

Prova. Sejam α e β planos paralelos e seja γ um plano transversal, que intersecta α e β segundo as retas r e s , respectivamente (veja a figura 6).

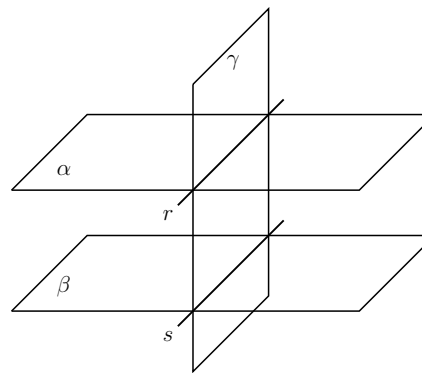


Figura 6: planos paralelos intersectados por um plano transversal.

Como $\alpha \cap \beta = \emptyset$, as retas r e s , que estão contidas em um mesmo plano (o plano γ), não podem ter pontos em comum, pois um tal ponto seria comum aos planos paralelos α e β . Portanto, r e s são retas paralelas. \square

Continuando, exibimos agora um importante critério para o paralelismo de dois planos.

Teorema 13. *Sejam α e β dois planos distintos. Suponha que existam retas concorrentes r e s contidas em α , e retas concorrentes r' e s' contidas em β , com $r \parallel r'$ e $s \parallel s'$ (veja a figura 7). Então, $\alpha \parallel \beta$.*

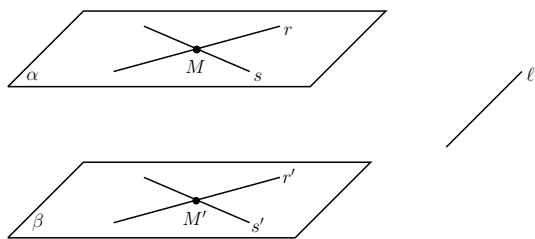


Figura 7: pares de retas concorrentes em planos paralelos.

Prova. Suponhamos, por contradição, que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Pelo Teorema 1, temos $\alpha \cap \beta = \ell$, onde ℓ é uma reta. Por outro lado, uma vez que $r \parallel r'$ e $r' \subset \beta$, segue do pelo Teorema 10 que $r \parallel \beta$. De modo análogo, $s \parallel s'$ e $s' \subset \beta$ implicam $s \parallel \beta$.

Agora, pelo Teorema 9, temos que $r \parallel \ell$ e $s \parallel \ell$. Mas aí, pela transitividade do paralelismo de retas contidas em um mesmo plano, teríamos necessariamente $r \parallel s$, o que não ocorre, por hipótese. Como chegamos a um absurdo, concluímos que os planos α e β não podem se intersectar. Logo, são paralelos. \square

Vamos usar o Teorema 13 para mostrar como construir um plano paralelo a um plano dado α e passando por um ponto dado $M' \notin \alpha$. Para isso, consideramos duas retas r e s , contidas em α e que se intersectam em M . Em seguida, traçamos o plano β que passa por r e M' e o plano γ passa por s e M' . Em β , seja r' a reta paralela a r e passando por M' ; em γ , seja s' a reta paralela a s passando por M' . As retas r' e s' se intersectam em M' e determinam um plano α' . Pelo Teorema 13, os planos α e α' são paralelos.

O argumento do parágrafo anterior demonstra parte do seguinte resultado.

Teorema 14. *Por um ponto não situado em um plano dado, pode-se traçar um único plano paralelo ao plano dado.*

Prova. Conforme comentamos, a existência de tal plano é garantida pelo argumento delineado na discussão que precede o enunciado do teorema.

Para a unicidade, sejam dados um plano α e um ponto $M' \notin \alpha$. Por absurdo, suponhamos que, por M' , passem dois planos β' e β'' , ambos paralelos a α . Seja B um ponto pertencente a β' mas não pertencente a β'' . Por M' , B e um ponto qualquer $A \in \alpha$, passa um único plano γ ; seja r a reta obtida como interseção entre os planos α e γ . Pelo Teorema 12, a reta $r = \alpha \cap \gamma$ é paralela à reta $r' = \beta' \cap \gamma$ e também é paralela à reta $r'' = \beta'' \cap \gamma$. Logo, as retas r , r' e r'' , todas contidas no plano γ , são tais que $r \parallel r'$ e $r \parallel r''$, o que força $r' \parallel r''$. Mas isso é impossível, pois ambas as retas passam pelo ponto M' . O absurdo vem de termos suposto a existência de dois planos distintos, paralelos ao plano α e passando por M' . Logo, tal plano paralelo é, de fato, único. \square

Dicas para o Professor

A abordagem *axiomática* ou *Euclidiana* da geometria espacial exige mais tempo e dedicação do professor. Você pode optar por seguir esse texto ou por exibir os resultados sem as demonstrações, ou, ainda, por omitir algumas demonstrações que julgar mais elaboradas. Caso opte por seguir o texto à risca, deve estar preparado para dedicar um bom tempo a ele. Para sermos mais precisos, estimamos que sejam necessárias 4 ou 5 aulas de 50 minutos cada para cobrir todo esse material. Esse tempo pode aumentar ou diminuir conforme o rendimento da turma. Caso deseje omitir algumas, ou todas as demonstrações, o tempo necessário pode ser reduzido a, no máximo, 3 aulas de 50 minutos cada.

Um fato extremamente importante na abordagem Euclidiana da geometria espacial é que as figuras são meras representações dos objetos geométricos. De outra forma, embora a intuição geométrica nasça dos objetos físicos que nos rodeiam, as figuras geométricas que definimos e estudamos no texto não fazem, em princípio, parte do mundo físico: não encontramos retas ou planos em um passeio pelo parque. Esses objetos, então, existem apenas em nossa mente, e só os associamos a objetos do mundo físico que nos rodeia pela comodidade de construirmos *representações mentais* familiares para os mesmos.

Dessa forma, é interessante encarar a geometria como um *jogo*, onde os axiomas são as regras e as demonstrações são argumentações que só podem utilizar tais regras (ou seja, os axiomas) e aquilo que já foi demonstrado. Assim, o fato de que os teoremas da geometria refletem propriedades interessantes e úteis dos objetos físicos reais que nos circundam é secundário.

Esse modo peculiar de pensamento (axiomático, lógico e dedutivo) é uma herança da antiguidade clássica grega, talvez a maior que recebemos dela. Qual é a vantagem desse modo de pensamento? Longe de ser uma limitação, ele é uma libertação: não há necessidade de trabalharmos com

representações concretas (esboços de figuras) para construirmos toda uma teoria geométrica. De outra forma, caso um determinado conjunto satisfaça os axiomas, ele também satisfará todos os resultados da teoria.

Mais informações sobre a abordagem axiomática da Geometria podem ser encontradas na sugestão de leitura complementar [2], p. 219.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2014.
2. H. B. Griffiths e P. J. Hilton, *Matemática Clássica, uma Interpretação Contemporânea*, vol. 2. São Paulo, Editora Edgard Blücher/Ed. USP, 1975.
3. P. C. P. Carvalho *Introdução à Geometria Espacial*, quarta edição. Rio de Janeiro, SBM, 2005.